I. megoldás. Vegyük észre, hogy a belső gyökjel alatt 3-mal az első zárójeles tényezőbe beszorozva, a két tényező összege kétszer akkora, mint a belső gyökjel előtti kifejezés, és így

$$\frac{3}{2}(1-\cos\vartheta)+\frac{1}{2}(1+\cos\vartheta-2\sin\vartheta)=2-\cos\vartheta-\sin\vartheta,$$
$$K^2=\left(\sqrt{3\cdot\frac{1-\cos\vartheta}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta-2\sin\vartheta}{2}}\right)^2.$$

A gyökjelek alatti kifejezéseket tovább alakítva

(2) $$\frac{1}{2}(1+\cos\vartheta-2\sin\vartheta)=\cos^2\frac{\vartheta}{2}-2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}=\cos^2\frac{\vartheta}{2}\left(1-2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right),$$

ennélfogva

(3) $$K=\sqrt{3}\cdot\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|+\left|\cos\frac{\vartheta}{2}\right|\cdot\sqrt{1-2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}.$$

A belső gyökjel előtti kifejezés pozitív:

$$(1-\cos\vartheta)+(1-\sin\vartheta)>0,$$

hiszen egyik zárójelben sem állhat negatív szám, azért (1) is, (3) is csak ott *nincs* értelmezve, ahol a belső gyökjel alatt

$$1+\cos\vartheta-2\sin\vartheta<0,\quad \text{másképpen}\quad 1-2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}<0,\quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}>\frac{1}{2}.$$

Ez a tangens-függvény egy periódusában, pl. a $(0,\pi)$ intervallumban, akkor teljesül, ha

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\vartheta}{2}<\frac{\pi}{2},$$

vagyis a $(0,2\pi)$ intervallumban a következő értékekre:

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}<\vartheta<\pi.$$

Az értelmezési tartományt azonban kényelmesebb a $(-\pi,\ \pi)$ intervallumban megadni, mert ebben összefüggő: $-\pi\leqq\vartheta\leqq\operatorname{arc\ tg}4/3$ esetén (1) a (3) alakban írható, hozzátéve, hogy $\vartheta=-\pi$ esetén (3) második tagja (2) első alakja miatt 0.

Bárány Imre (Budapest, Corvin Mátyás Gimn.)
Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. Valójában a

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)/2}+\sqrt{\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)/2}$$

azonosságot[1] használtuk fel. Esetünkben

$$A^2-B=(2-\cos\vartheta-\sin\vartheta)^2-3(1-\cos\vartheta)(1+\cos\vartheta-2\sin\vartheta)=$$
$$=(1-2\cos\vartheta+\sin\vartheta)^2.$$

II. megoldás. Próbálkozzunk $\vartheta/2=\alpha$ szögfüggvényeinek bevezetésével, így a fellépő $1-\cos\vartheta$, $1+\cos\vartheta$ kifejezések egy-egy négyzetes taggá alakíthatók:

$$K=\sqrt{2-\cos\vartheta-\sin\vartheta+\sqrt{3\left[1-(1-2\sin^2\alpha)\right]\cdot\left[1+(2\cos^2\alpha-1)-4\sin\alpha\,\cos\alpha\right]}}=$$
$$=\sqrt{2-\cos\vartheta-\sin\vartheta+2\sqrt{3\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\,\cos\alpha)}}=$$
$$=\sqrt{2-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\,\cos\alpha+2\sqrt{3}\cdot|\sin\alpha|\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}}=$$
$$=\sqrt{3\sin^2\alpha+\left(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\right)+2\sqrt{3}\cdot|\sin\alpha|\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\cdot|\sin\alpha|+\sqrt{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\,\cos\alpha}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{3}\cdot|\sin\alpha|+\sqrt{\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{3}\cdot|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\cdot\sqrt{1-2\operatorname{tg}\alpha},$$

ami azonos (3)-mal.

Megjegyzés. Ajánljuk a feladat összehasonlítását az 1306. feladattal.[2]

[1] Lásd pl. *Faragó László*: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1965. 13. old. 80. feladat
[2] Lásd a megoldást K. M. L. 29 (1964/12 füzet) 209. o.