a) Általában két s jelű lemez közé s további lemez kerül, így ha az első lemez az l-edik helyre kerül, akkor a második az $l+s+1$-edikre. Ha s páros, akkor az egyik sorszám páros, a másik páratlan, ha viszont s páratlan, akkor vagy mindkét sorszám páros vagy mindkettő páratlan. Az $1.--2k$. sorszámok fele páratlan, fele páros, a páros jelű lemezek egyike páros, másika páratlan sorszámú helyen van, így ugyanannyi páratlan jelű lemezpár kerül páratlan sorszámú helyre, mint páros sorszámú helyre.

b) $k=3$ esetén a páratlan és a páros sorszámú helyekre egyaránt egy 2-es és két páratlan jelű lemez jut. A két 3-as lemezt a 2. és 6. helyre állítva a 4. helyre 2-es lemez jut, így az 1. helyre is, és az elrendezés

$$2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3. \tag{1}$$

A 3-as pár másik lehetséges helyzetéből, az 1. és 5. helyből kiindulva az előbbi elrendezést fordított sorrendben kapjuk. Ezt nem tekintjük az előbbitől lényegesen különbözőnek, ugyanígy k további értékeinek esetében sem.

c) A $k=4$ esetben hasonlóan a 2-es és a 4-es lemezek egyik példánya páros, másika páratlan sorszámú helyre jut, és a maradó 2 páros és 2 páratlan sorszámú hely–pár egyikére az 1-esek, másikára a 3-asok jutnak.

Megmutatjuk, hogy a két 3-as között középen álló helyre állítandó páros jelű lemez nem lehet 4-es. Legyen e hely sorszáma a sor hozzá közelebbi végétől számítva n – azaz $n \leqq 4$ –, és tegyünk ide 4-es lemezt. Ekkor a két 3-as az $n \pm 2$-edik helyeken áll, és az ezekkel egyenlő párosságú $n+4$-edik helyen 2-es. Ennek párja az $n+1$-edik helyen áll, hiszen nem állhat az $n+7$-edik helyen, mert $n-2 \geqq 1$ miatt $n+7>8$; a második 4-es lemez hasonlóan csak az $n+5$-ödik helyen állhat, így a két 1-es számára az $n-1$-edik és az $n+3$-adik hely marad, ezek között azonban 3 lemez áll.

Az n-edik helyre 2-est téve a 4-esek hely–sorszáma hasonlóan $n+4$ és $n-1$. A második 2-es nem állhat az $n+3$-adik helyen, viszont az $n-3$-adikra téve megfelelő elrendezést kapunk:

$$2,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4. \tag{2}$$

Más megoldás nincs.

d) Írjuk (1)-ben 1, 2, 3 helyére rendre a 2-szeresénél 1-gyel nagyobb számot, és legyen a még betöltendő helyek jele x. Így adódik pl. az

$$x,\ x,\ x,\ 5,\ x,\ 7,\ x,\ x,\ 3,\ 5,\ x,\ x,\ 3,\ 7,\ x,\ x,\ x,$$

rész–elrendezés, és ebből próbálgatással $k=7$-re

$$1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 4,\ 2,\ 3,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3,\ 7.$$

Hasonlóan adódnak, 1, 2, 3 helyén a 4, 6, 7, ill. 4, 5, 7 lemezekkel:

263 274 356 141 75, 627 423 564 371 51,
ill. 357 436 254 271 61.

1, 2, 3 helyén 5, 6, 7-tel próbálkozva nem találtunk megoldást.

Hasonlóan kapjuk $k=8$ céljára (2)-ben 1, 2, 3, 4 helyére rendre a 2, 4, 6, 8, ill. a 4, 6, 7, 8 számot írva a következő elrendezéseket:

151 467 854 236 2738, ill. 362 732 856 417 1548.

1, 2, 3, 4 helyén 5, 6, 7, 8-cal próbálkozva nem találtunk megoldást.

e) Az a) feltétel csak akkor teljesülhet, ha k-ig páros számú páratlan szám van. $k=4j+1$-ig és $k=4j+2$-ig egyaránt $2j+1$ páratlan szám van, tehát ezekben az esetekben a feladat nem oldható meg.

Bárány Imre (Budapest–Mátyásföld, Corvin M. G. III. o. t.)
Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. G. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Jelöljük $(a,\ b)$-vel az összes egyenlő párosságú számok egymásutánját az a-tól a b-ig növekedő vagy csökkenő sorrendben, aszerint, hogy $a<b$ vagy $a>b$. Ekkor $k=4m-1$ és $k=4m$, $m \geqq 2$ esetén a következő elrendezés mindig megoldást ad. Mindkét esetben a

$$(4m-4,\ 2m),\ 4m-2,\ (2m-3,\ 1),\ 4m-1,\ (1,\ 2m-3),\ (2m,\ 4m-4)$$

rész–elrendezéssel kezdjük a megoldást, és közös a továbbiakban a

$$(4m-3,\ 2m+1),\ 4m-2,\ (2m-2,\ 2),\ 2m-1,\ 4m-1,$$
$$(2,\ 2m-2),\ (2m+1,\ 4m-3)$$

rész is. E két rész közé $k=4m-1$ esetén a hátra levő $2m-1$-es lemez teendő, $k=4m$ esetén pedig az első $4m$-es lemez, és ekkor az elrendezés végén $2m-1$, $4m$ áll. Ezek $m=1$ esetén (1)-et, ill (2)-t adják (a zárójeles sorozatok elmaradnak).

A kizárt k esetekben is van ilyen megoldás, ha előírjuk egy 0-jelű lemez közbeiktatását. $k=4m-3$ (azaz $4j+1$), $m \geqq 3$ esetére:

$$(4m-6,\ 2m-2),\ 4m-5,\ (2m-5,\ 1)\ 4m-4,\ (1,\ 2m-5),\ (2m-2,\ 4m-6),$$
$$4m-3,\ (4m-7,\ 2m-1),\ 4m-5,\ (2m-4,\ 2),\ 2m-3,\ 4m-4,$$
$$(2,\ 2m-4),\ (2m-1,\ 4m-7),\ 2m-3,\ 0,\ 4m-3.$$

$k=4m-2$ (azaz $4j+2$), $m \geqq 4$ esetére pedig:

$$1,\ 2m-3,\ 1,\ (4m-8,\ 2m-2),\ (2m-5,\ 3),\ 4m-3,\ 2m-3,\ 4m-6,$$
$$(3,\ 2m-5),\ 4m-4,\ (2m-2,\ 4m-8),\ 4m-2,\ (4m-5,\ 2m-1),$$
$$(2m-4,\ 2),\ 4m-6,\ 4m-3,\ (2,\ 2m-4),\ 4m-4,\ (2m-1,\ 4m-5),\ 0,$$
$$4m-2.$$

Ezeket az általános megoldásokat *R. O. Davies* közölte.[1]

2. Az, hogy $k=4j+1$ és $k=4j+2$ esetén a feladat nem oldható meg, más úton is belátható (ugyancsak párossági meggondolásokkal):

α) Jelöljük az i lemez első előfordulásának sorszámát s_i-vel, ekkor a második i-lemezé s_i+i+1, így valamennyi sorszám összege:

$$2\,(s_1+s_2+\ldots+s_k)+[2+3+\ldots+k+(k+1)],$$

másrészt a szóban forgó sorszámok összege

$$1+2+3+\ldots+(2k-1)+2k=k\,(2k+1).$$

A két kifejezés egyenlőségéből az 1, 2, ..., k lemez első előfordulása sorszámainak összege

$$s_1+s_2+\ldots+s_k=\frac{2k(2k+1)-k(k+3)}{4}=\frac{1}{4}k(3k-1).$$

Ez azonban $k=4j+1$ és $k=4j+2$ esetén nem egész szám, ezért ezekben az esetekben nincs megfelelő elrendezés.

Bárány Imre

β) A lemezek 1, 1, 2, 2, ..., k, k sorrendjéből elindulva minden elrendezéshez eljuthatunk szomszédos párok cseréjében álló lépésekkel. Olyan sorrendet akarunk elérni, amelyben az egyező jelű lemezek közt lévő lemezek összes száma $1+2+\ldots+(k-1)+k=k(k+1)/2$. Egy szomszédos l és m jelű lemez cseréjével csak a két l jelű és a két m jelű lemez közti lemezek száma változik, mégpedig mindegyik vagy nő vagy csökken 1-gyel. Így az egyező jelű lemezek közti lemezek számának összege vagy 2-vel nő, vagy 2-vel csökken, vagy nem változik, párossága tehát nem változik. A kiinduló helyzetben ez az összeg 0, tehát páros, így mindig páros kell hogy legyen. Azonban $k=4j+1$-re és $4j+2$-re $k\,(k+1)/2$ páratlan, tehát a kívánt elrendezés nem létezik.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. G. III. o. t.)

[1] The Mathematical Gazette 43 (1959) 253–255. o.