I. megoldás. Jelöljük a kérdéses összeget S_n-nel. $n=1$, 2, 3, és 4 esetén

$$S_1=\frac{1}{3},\qquad S_2=\frac{11}{24},\qquad S_3=\frac{59}{120},\qquad S_4=\frac{359}{720}.$$

Az utóbbi 3 érték nevezőjében rendre 4!, 5!, ill. 6! áll, számlálójuk pedig 1-gyel kisebb a nevező felénél. Ez a szabályszerűség S_1-nek 2/6 alakjára is fennáll. Ezek az összegek tehát

$$S_n=\frac{\frac{(n+2)!}{2}-1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!} \tag{1}$$

alakúak. Bebizonyítjuk a teljes indukció módszerével, hogy ez az összefüggés minden n természetes számra helyes.

Előkészítésül egyszerűbb alakra hozzuk S_n k-adik tagját, ahol $1\leqq k\leqq n$. A nevezőben $k!$-t kiemelve, majd tovább szorzattá alakítva és egyszerűsítve a törtet $k+2$-vel

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}= \tag{2}$$

$$\frac{(k+2)}{k!\big(1+k+1+(k+1)(k+2)\big)}=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\frac{1}{k!(k+2)}.$$

Tegyük fel, hogy (1) érvényes valamely n indexre, megmutatjuk, hogy ekkor öröklődik az 1-gyel nagyobb indexre is. (2) felhasználásával

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)!(n+3)}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{n+3-(n+2)}{(n+3)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+3)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\big((n+1)+2\big)!}.$$

Ez úgy adódik (1)-ből, hogy n helyére $n+1$-et írunk. Így (1) valóban minden természetes számra igaz. Egytagú kifejezés alakban

$$S_n=\frac{(n+2)!-2}{2(n+2)!}.$$

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás. A fenti (2) kifejezés így is írható:

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}.$$

S_n minden egyes tagját így átalakítva tüstént (1) második alakjára jutunk:

$$S_n=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Hernádi Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha S_n egyes tagjaihoz az

$$S_n^*=\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n+2!}$$

összeg egymás utáni tagjait adjuk és észrevesszük, hogy az összeg (2) alapján

$$\frac{1}{k!(k+2)}+\frac{1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!},\qquad \text{így a teljes összeg}$$
$$\frac{1}{2!}+S_n^*-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Hoffmann György (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)