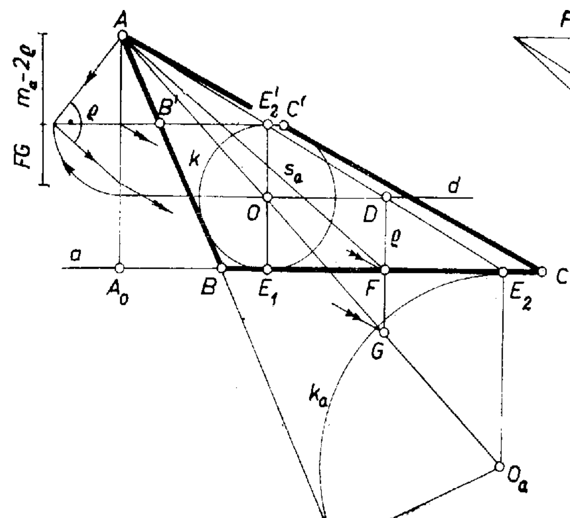
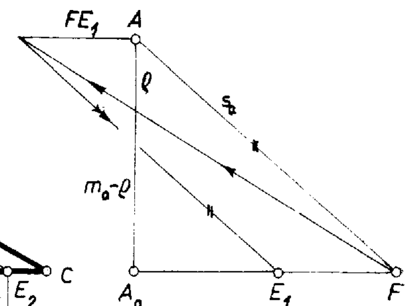
I. megoldás. Legyen az $ABC = H$ háromszögben az $AA_0 = m_a$ magasság, az $AF = s_a$ súlyvonal és a k beírt kör ϱ sugara adott; ennek BC-vel párhuzamos érintője H-ból hozzá hasonló $AB'C' = H'$ háromszöget metsz ki, amelynek k a $B'C'$ oldalhoz hozzáírt köre. H-nak BC-hez írt k_a külső érintő körét érintse BC E_2-ben, k-t E_1-ben, továbbá $B'C'$ k-t E_2'-ben. Mivel A a H és H' hasonlósági pontja, így A, E_2', E_2 egy egyenesen van, másrészt $E_1E_2' \perp BC$. Ismeretes, hogy a BC oldal F felezőpontja E_1E_2-t is felezi. E_2E_2' felezőpontját D-vel jelölve az $E_1E_2E_2'$ háromszög DF középvonala merőleges BC-re és ϱ hosszúságú, E_1E_2-vel párhuzamos d középvonala pedig E_1E_2'-t felezőpontjában, O-ban metszi, ami k középpontja (1. ábra).

Ebből a következő szerkesztés adódik: Egy m_a hosszúságú AA_0 szakaszra A_0 pontjában állított a merőlegesből A körüli s_a sugarú körívvel kimetsszük F-et. Az itt a-ra állított merőlegesre rámérjük az A-t tartalmazó oldalon az $FD = \varrho$ távolságot; megszerkesztjük AD és a metszéspontjának, E_2-nek F-re vonatkozó E_1 tükörképét és felmérjük a-ra merőlegesen az A-t tartalmazó oldalon az $E_1O = \varrho$ távolságot. Az O körüli ϱ sugarú k körhöz A-ból húzott érintők metszik ki a-ból B-t és C-t.

A szerkesztés helyességéhez annyit kell belátnunk, hogy F a BC szakasz felezőpontja. Az E_1O és E_2D egyenesek E_2' metszéspontja k-nak E_1-gyel átellenes pontja, mert $FD = \varrho$ az $E_1E_2E_2'$ háromszög középvonala. Meghúzva E_2'-ben k-nak $B'C'$ érintőjét, k az $AB'C'$ háromszög $B'C'$-höz hozzáírt köre, s így E_2 az ABC háromszög BC-hez hozzáírt körének érintési pontja, tehát az imént felhasznált tétel szerint E_1E_2-nek F középpontja BC-t is felezi.



1. ábra



2. ábra

Megjegyzés. Némi számolás alapján O-t kimetszhetjük d-ből a BAC szög felezőjével is, kitűzve ennek az a-ra F-ben állított merőlegesen levő G pontját. G felezi az $OE_1O_aE_2$ trapéz OO_a átlóját, és így $FG = (\varrho_a - \varrho)/2$, ill. a H és H' hasonlóságából adódó $\varrho_a = \varrho m_a/(m_a - 2\varrho)$ kifejezés alapján $FG = \varrho^2/(m_a - 2\varrho)$. G az a-nak A-t nem tartalmazó partján van, mert $\varrho_a > \varrho$ (lásd a szerkesztést az 1. ábrán, AA_0 bal oldalán).

A kitűző

II. megoldás (vázlat). A háromszög területének két kifejezéséből, a szokásos és a fentebbi, valamint $A_0F = q$ jelölésekkel, $b \geq c$ előírásával

$$2t = am_a = (a+b+c)\varrho, \quad b + c = p \cdot a, \quad \text{ahol} \quad p = (m_a - \varrho)/\varrho, \tag{1}$$

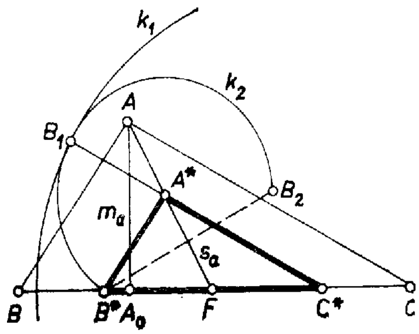
adatainkból előállítható arányszám. Másrészt az AA_0C és AA_0B derékszögű háromszögekből kellő rendezéssel és (1) figyelembevételével

$$m_a^2 = b^2 - (q + a/2)^2 = c^2 - (q - a/2)^2, \qquad b^2 - c^2 = 2aq,$$
$$b - c = 2aq/(b+c) = 2q/p = 2q\varrho/(m_a - \varrho) = 2\varrho\sqrt{s_a^2 - m_a^2}/(m_a - \varrho),$$

ez az adatokból, pl. negyedik arányos szakaszként, megszerkeszthető.

Mármost $b - c = CA - BA = CE_1 - BE_1 = BE_2 - BE_1 = E_1E_2$. Eszerint E_1-et megadja a fenti AA_0F háromszöghöz az F-ből A_0 irányában fölmér $(b-c)/2 = \varrho \cdot q/(m_a - \varrho) = \varrho \cdot A_0F/(m_a - \varrho)$ szakasz végpontja (2. ábra), ebből k megszerkeszthető.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

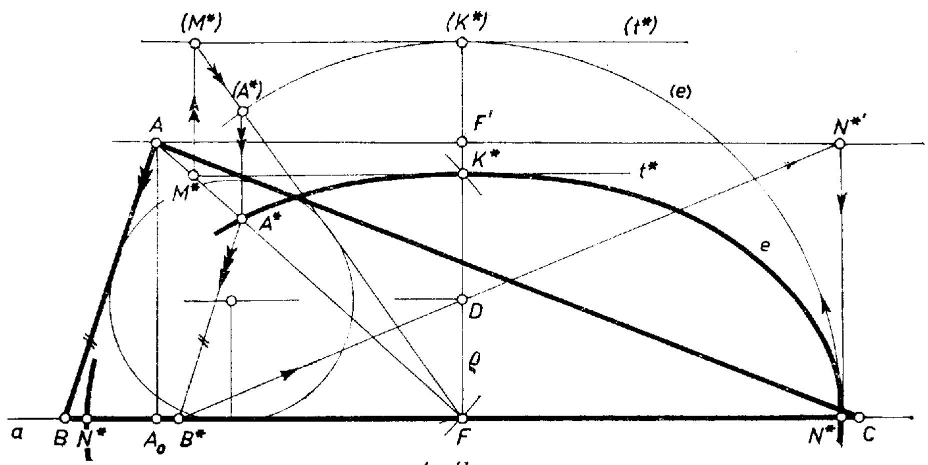


3. ábra

III. megoldás (vázlat). Az A_0AF derékszögű háromszöget megszerkesztjük, mint az I. megoldásban, majd a keresetthez helyzetre is hasonló $A^*B^*C^*$ háromszöget szerkesztünk. Tetszés szerint kijelölünk A_0F-en egy F-re szimmetrikus B^*C^* szakaszt (3. ábra). A^*-ra (1) szerint $A^*B^*+A^*C^* = B^*C^*\cdot p = u^*$, ami az adatokból megszerkeszthető. A C^*A^* szakasz meghosszabbítására felmérve az $A^*B_1 = A^*B^*$ szakaszt, B_1 a C^* középpontú, u^* sugarú k_1 kör és az A^* középpontú, A^*B^* sugarú k_2 kör érintkezési pontja. k_1 megszerkeszthető, k_2 átmegy B^*-nak az A^*F egyenesre vonatkozó B_2 tükörképén is, ami megszerkeszthető. Így a feladatot visszavezettük a k_1 kört érintő és a B^* és B_2 ponton átmenő kör középpontjának megszerkesztésére. Ennek egy megoldása szerepel a 768. gyakorlat II. megoldásában.[1]

A^*-ot ismerve, B-t és C-t az A-n át A^*B^*-gal és A^*C^*-gal párhuzamosan húzott egyenes metszi ki a B^*C^* egyenesből.

Domokos László (Tatabánya, Árpád Gimn.)



4. ábra

Megjegyzés. A^* az AF egyenes metszéspontja a B^*, C^* fókuszú, u^* nagytengelyű ellipszissel, s így megszerkeszthető az ellipszis és főköre közti (derékszögű) affinitás alapján is.[2] A szerkesztést a 4. ábra mutatja.

Márki László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

---

[1] K. M. L. 26 (1963) 138. o.

[2] Lásd *Lőrincz Pál:* Ábrázoló geometria a gimn. IV. o. számára, 6. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962, 43–47. o.; vagy *Vigassy Lajos:* Geometriai transzformációk, Tankönyvkiadó, Bp. 1963, 47–50. o.