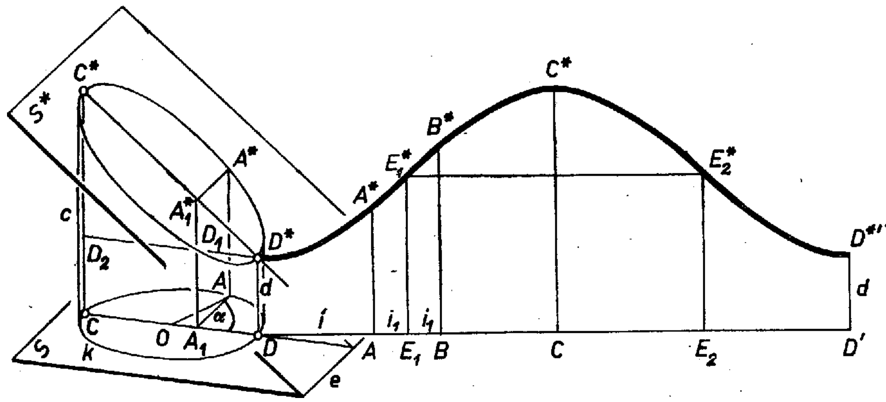
a) Jelöljük a merőleges és ferde metszősíkot S-sel és S^*-gal,. (1. ábra), metszésvonalukat e-vel, az S-ben levő körmetszetet k-val, középpontját O-val. A leghosszabb és legrövidebb alkotó k-nak az e-től legtávolabbi C és e-hez legközelebbi D pontjában S-re emelt merőlegesnek S^*-ig terjedő CC^*, DD^* szakasza, mert ha a pont az S síkban mozog, ennek a merőleges szakasznak a hossza e-től távolodva nő. CD a k kör e-re merőleges átmérője.



1. ábra

A palástot az előírt módon kiterítve k egy ($2\pi r$-hosszúságú) DD' egyenesszakasszá terül ki. Kézenfekvő, és a követelménynek megfelel, ha a tetszés szerinti AA^* alkotót (a kiterített palást DD'-re merőleges metszetét) a DD'-n levő A végpontjának D-től mért i távolságával fejezzük ki. A síkba terítést végezhetjük úgy, hogy ez k D-től pozitív irányban A-ig menő ívének a kiterítésével keletkezzék. Legyen a megfelelő $DOA\sphericalangle = \alpha$ $(0 \leqq \alpha \leqq 2\pi)$. Ekkor $i = r\alpha$.

Legyen A és A^* vetülete a CD, ill. C^*D^* szakaszon A_1, ill. A_1^*. A_1, C, D, A_1^*, C^*, D^* egy síkban vannak, a CC^*, DD^* párhuzamosok meghatározta síkban, továbbá $A_1A_1^* = AA^*$, mert $AA_1A_1^*A^*$ paralelogramma (téglalap), ugyanis az S síkban $AA_1 \perp CD \perp e$, így $AA_1 \parallel e$, hasonlóan az S^* síkban $A^*A_1^* \perp C^*D^* \perp e$, így $A^*A_1^* \parallel e$, tehát $AA_1 \parallel A^*A_1^*$. Az AA^*, $A_1A_1^*$ oldalak is párhuzamosak, mert merőlegesek S-re, az utóbbi azért, mert az A, A_1, A^* és A_1^*-ot tartalmazó sík metszésvonala a C, C^*, D, D^*-ot tartalmazó síkkal, és ezek merőlegesek S-re, miután tartalmazzák az S-re merőleges AA^* ill. CC^* egyenest.

Messe a D^*-ból CD-vel párhuzamosan húzott egyenes $A_1A_1^*$-ot D_1-ben, CC^*-ot D_2-ben. A $C^*D^*D_2$ és $A_1^*D^*D_1$ hasonló háromszögekből

$$\frac{D_1A_1^*}{D_2C^*} = \frac{D^*D_1}{D^*D_2} = \frac{r - OA_1}{2r} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

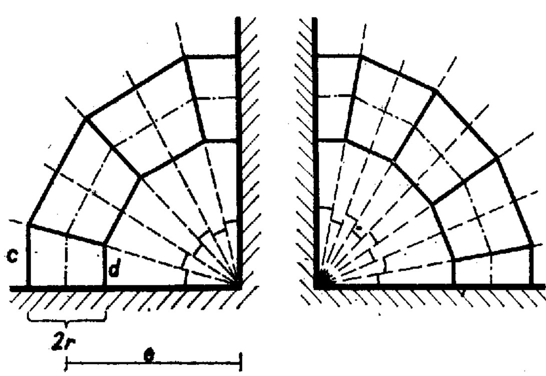
(Eredményünk akkor is helyes, ha $D^*D_1 > r$), másrészt

$$\frac{D_1A_1^*}{D_2C^*} = \frac{A_1A_1^* - d}{c-d} = \frac{AA^* - d}{c-d}.$$

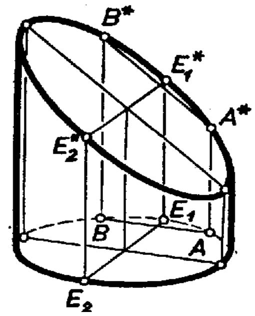
Innen a keresett összefüggés, α-t i-vel fejezve ki

$$AA^* == \frac{c-d}{2}\left(1 - \cos\frac{i}{r}\right) + d = \frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2}\cos\frac{i}{r} \qquad (0 \leqq i \leqq 2\pi r).$$

Eszerint a palást görbe határvonala a $z = \cos i$ függvény képéből áll elő úgy, hogy ezt az i-tengely irányában r-szeresére, a z-tengely irányában $-(c-d)/2$-szeresére nyújtjuk (vagyis $(c-d)/2$-szeresére nyújtjuk és tükrözzük az i-tengelyre), végül a z-tengely irányában $(c+d)/2$ szakasszal eltoljuk.



2. ábra



3. ábra

A hengerpalást felszínének meghatározásához belátjuk a következőt. Legyen E_1E_2 a k kör e-vel párhuzamos átmérője (3. ábra), $E_1E_1^*$, $E_2E_2^*$ a végpontjain átmenő alkotók S^*-ig terjedő szakaszai ($E_1E_1^* = E_2E_2^*$). Ekkor a csődarabot $E_1^*E_2^*$ -on át S-sel párhuzamos síkkal elvágva, és a sík feletti részt $E_1^*E_2^*$ körül $180°$-kal elforgatva a csődarabot egyenes körhenger-palásttá lehet átalakítani.

Valóban, ha A és B a k E_1E_2-re szimmetrikus pontjai, és AA^*, BB^* a rajtuk átmenő alkotószakaszok, akkor A^* és B^* is egymás tükörképei $E_1^*E_2^*$ -ra, tehát összekötő szakaszuk felezőpontja $E_1^*E_2^*$ -on van. Mivel ez az egyenes párhuzamos e-vel, s így az S síkkal is, így $AA^* + BB^* = 2E_1E_1^*$. Így az említett elmetszés és átforgatás után valóban minden alkotószakasz egyenlő hosszúvá válik. Mivel C és D is E_1E_2-re szimmetrikus, így a keletkező egyenes körhenger magassága

$$\frac{1}{2}(CC^* + DD^*) = \frac{c+d}{2},$$

és a hengerpalást felszíne $\pi r(c+d)$.

b) A 2. ábra szerinti könyökcsövek 6, ill. 8 olyan egybevágó darabra bonthatók fel, amilyeneknek a felszínét fent számítottuk. A jelölt szögek nagysága $\beta = 90°/6 = 15°$, ill. $\gamma = 11{,}25°$. A fenti képletben $c+d$ a csődarab trapéz alakú vetülete középvonalának 2-szerese, és az első középvonal e-vel derékszögű háromszöget alkot, tehát a könyökcsövek felszíne:

$$12\,\pi re\,\mathrm{tg}15° \approx 10{,}1\,re, \quad \text{ill.}$$

$$16\,\pi re\,\mathrm{tg}11{,}25° \approx 10{,}0\,re.$$

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. G.)
Füvesi István (Hódmezővásárhely, Bethlen G. G.)

Megjegyzés. Meghatározható a palást felszíne azon keresztül is, hogy ha a kiterített palástot a DD' határának E_1 első és E_2 harmadik negyedelő pontjában emelt merőlegesek E_1^*, E_2^* végpontjain átmenő egyenessel elmetsszük, az egyenes feletti darabot a CC^* egyenessel kettévágjuk, és a részeket E_1^*, ill. E_2^* körül $180°$-kal DE_1, ill. E_2D' szakasz fölé forgatjuk. Ekkor téglalapot kapunk. Valóban, pl. két az E_1-re szimmetrikus A és B pontban húzott ordináta összege

$$\frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2}\cos\frac{\pi r/2 - i_1}{r} + \frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2}\cos\frac{\pi r/2 + i_1}{r} =$$

$$= (c+d) - \frac{c-d}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i_1}{r}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{i_1}{r}\right)\right] = c+d.$$

$\left(0 \leqq i_1 < \dfrac{\pi r}{2}\right)$.