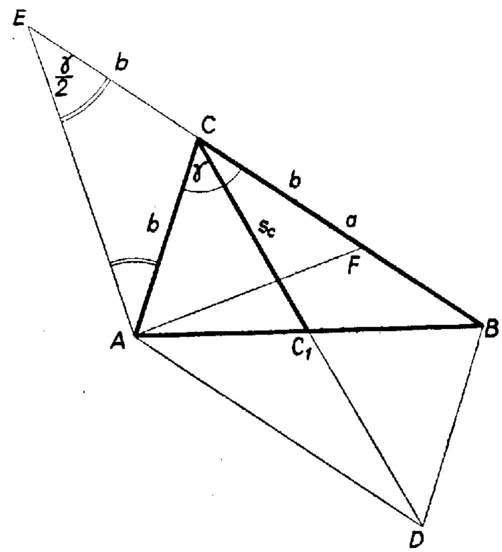
Betűzzük az ABC háromszöget úgy, hogy $BC \geq AC$, és legyen adott $BC + CA = a + b = e$ (ill. $a - b = f$, itt természetesen csak az $a > b$, $f > 0$ esettel foglalkozunk, különben csak egyenlő szárú háromszöget kell megoldani), $ACB\sphericalangle = \gamma$, $CC_1 = s_c$, ahol C_1 az AB oldal felezőpontja, legyen továbbá C tükörképe C_1-re D. Így $ACBD$ paralelogramma, és az ACD háromszögből

$$\begin{aligned}4s_c^2 =&a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \gamma) = (a-b)^2 - 2ab(1-\cos\gamma), \quad \text{ill.}\\ =&(a-b)^2 + 2ab(1+\cos\gamma), \quad \text{innen}\\ ab =& \frac{e^2 - 4s_c^2}{2(1-\cos\gamma)} = g, \quad \text{ill.} \quad -ab = \frac{f^2 - 4s_c^2}{2(1+\cos\gamma)} = h,\end{aligned}$$



ennélfogva a és b (ill. $-b$) a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2 - eu + g = 0,$$

ill.

$$v^2 - fv + h = 0.$$

Innen

(1) $$a = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{4s_c^2 - e^2\cos^2(\gamma/2)}}{2\sin\gamma/2},$$

ill.

(2) $$a = \frac{f}{2} + \frac{\sqrt{4s_c^2 - f^2\sin^2(\gamma/2)}}{2\cos\gamma/2},$$

amivel b is meg van határozva.

Az ABC háromszögből

$$\begin{aligned}c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\gamma) = e^2-\\ -(e^2 - 4s_c^2)\cdot\frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma} = e^2\left(1 - \operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2}\right) + 4s_c^2\operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

ill. hasonlóan

$$\begin{aligned}c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma) = f^2 - (f^2 - 4s_c^2)\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} =\\ = f^2\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) + 4s_c^2\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Mérjük rá a b oldalt C-től a BC oldal meghosszabbítására, ill. B felé, és legyen a végpont E, ill. F. Így CAE és CAF egyenlő szárú háromszögek, AF merőleges AE-re, $BE = e$, $BF = f$, a külső szög tétele alapján $CEA\sphericalangle =$

$BEA\sphericalangle=\gamma/2$, $BFA\sphericalangle=90^\circ+\gamma/2$, továbbá $BAE\sphericalangle=\alpha+\gamma/2=90^\circ+(\alpha-\beta)/2$, $BAF\sphericalangle=(\alpha-\beta)/2$, ezért az ABE, ABF háromszögből a színusz-tétel alapján

$$\sin BAE\sphericalangle=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{BE}{BA}\cdot\sin AEB\sphericalangle=\frac{e}{c}\sin\frac{\gamma}{2},\quad \text{ill.}$$
$$\sin BAF\sphericalangle=\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{f}{c}\sin BFA\sphericalangle=\frac{f}{c}\cos\frac{\gamma}{2},$$

ennélfogva α-t és β-t a különbségükre és az összegükre fennálló egyenletrendszerből kapjuk ($\alpha-\beta$ egyértelműen meghatározott, mert a fele hegyesszög).

A feladat megoldhatóságának első feltétele, hogy az ACD háromszög létezzék:

$$CA+AD>CD,\qquad \text{azaz}\ \ e>2s_c,\qquad \text{ill.}\qquad f<2s_c.$$

Ha f az adott, további feltétel nincs is, mert így (2)-ben a diszkrimináns pozitív. Amennyiben e adott, akkor a valós, ha

$$2s_c\ge e\cos\frac{\gamma}{2},\qquad \text{a fentivel összefoglalva}\quad e\cos\frac{\gamma}{2}\le 2s_c<e.$$

További feltétel nincs, c valós, mert a, b és γ bármely értékrendszeréhez tartozik c.

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)