Az előírt kör K középpontjának koordinátái $K(p,\,q)$. Ezek ismerete elegendő a kör megrajzolásához, mert a körnek át kell mennie az O origón, hiszen az $x=0$, $y=0$ értékpár kielégíti az egyenletet.

A parabolának és a körnek legfeljebb 4 közös pontja lehet. Ugyanis a két egyenletből y-t kiküszöbölve 4-edfokú egyenletet kapunk:

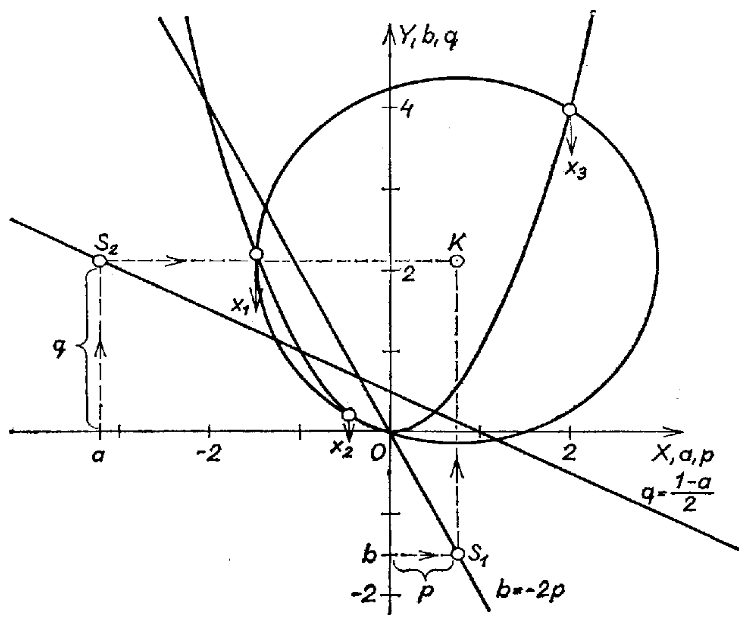
$$k^2x^4+(1-2kq)x^2-2px=0, \tag{1}$$

így legfeljebb 4 valós szám szerepelhet közös pont abszcisszájaként, és a parabolának minden abszcisszán csak egy pontja van. Egy közös pontjuk az origó, további közös pontjaik abszcisszái azt az egyenletet elégítik ki, amelyet (1)-ből az ismert $x=0$ gyökhöz tartozó x gyöktényező leválasztásával kapunk:

$$k^2x^3+(1-2kq)x-2p=0.$$

Itt $k\neq 0$ – különben parabola helyett az $y=0$ egyenessel állnánk szemben –, ezért az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$x^3+\frac{1-2kq}{k^2}\cdot x-\frac{2p}{k^2}=0. \tag{2}$$



A parabolának és a körnek az origótól különböző metszéspontjaihoz tartozó abszcisszák adják meg az

$$x^3+ax+b=0 \tag{3}$$

egyenlet gyökeit – azaz minden valós gyökét –, ha (2) ekvivalens (3)-mal, vagyis ha további két együtthatójuk rendre egyenlő:

$$\frac{1-2kq}{k^2}=a, \qquad -\frac{2p}{k^2}=b, \text{ és innen}$$

$$p=-\frac{k^2}{2}\cdot b, \qquad q=\frac{1}{2k}-\frac{k}{2}\cdot a. \tag{4}$$

Ezek szerint a (3) egyenlet valós gyökeit leolvashatjuk, mint az adott $y=kx^2$ parabola és a (4) kifejezésekkel meghatározott K $(p,\,q)$ középpontú, KO sugarú kör közös pontjainak abszisszáit. Pl. $k=1$-et választva a

$$K\left(-\frac{b}{2},\quad \frac{1-a}{2}\right)$$

középpont körüli, O-n átmenő körrel kell metszenünk a normálparabolát.

Az ábrán a $4x^3-13x-6=0$ egyenlet megoldása látható, itt $p=3/4$, $q=17/8$, továbbá $x_1=-3/2$, $x_2=-1/2$, $x_3=2$.

Recski András (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Kézenfekvő, hogy a harmadfokú egyenlet grafikus megoldásában a p, q koordinátákat is grafikusan állítsuk elő. Erre valók (továbbra is $k=1$ esetében) az ábra segédegyenesei, melyeknek egyenlete

$$x=-\frac{y}{2}, \quad \text{ill.} \quad y=\frac{1-x}{2}.$$

Az elsőnek $y=b$ ordinátájú S_1 pontjához $x=-b/2=p$ abszcissza tartozik, tehát $K=S_1$ segédponton átmenő, az Y-tengellyel párhuzamos egyenesen lesz. A második segédegyenes $x=a$ abszcisszájú S_2 pontjához tartozó ordináta $y=(1-a)/2=q$, tehát K-t a legutóbbi egyenesből az S_2-n átmenő, az X-tengellyel párhuzamos egyenes metszi ki.