A szóban forgó szelő végpontjai abszcisszáinak különbsége 1, ezért iránytangense egyenlő az ordináták különbségével, $2n+1$-gyel. Így a szelő egyenlete

$$y=(2n+1)(x-n)+n^2=(2n+1)x-(n^2+n). \tag{1}$$

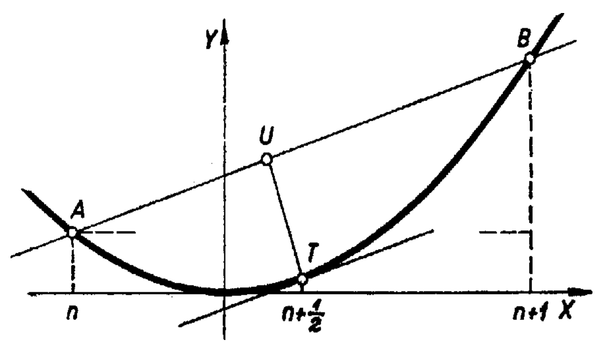
Tudjuk, hogy az $y=x^2$ parabola bármely pontbeli érintőjének iránytényezője 2-szer akkora, mint az érintési pont abszcisszája, így az adott szelővel párhuzamos érintő érintési pontjának koordinátái:

$$T\left(n+\frac{1}{2},\ \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)=T\left(n+\frac{1}{2},\ n^2+n+\frac{1}{4}\right).$$

A kérdéses távolságot T-nek az (1) egyenesen levő U vetületétől való távolsága adja meg, ami az ismert képlet alkalmazásával a

$$d=TU=\frac{(n^2+n+1/4)-(2n+1)(n+1/2)+(n^2+n)}{\sqrt{(2n+1)^2+1}}=$$
$$=\frac{-1}{4\sqrt{4n^2+4n+2}}$$

kifejezés abszolút értéke.



A kérdéses k arány megállapításához elég U egyik koordinátáját kiszámítanunk, ugyanis egy szakasz részeinek aránya egyenlő vetülete megfelelő részeinek arányával, és így

$$\frac{AU}{UB}=k=\frac{x_U-x_A}{x_B-x_U}=\frac{y_U-y_A}{y_B-y_U} \tag{2}$$

(ahol A és B a szakasz végpontjai).

A TU egyenes egyenlete

$$y=-\frac{1}{2n+1}\left(x-n-\frac{1}{2}\right)+n^2+n+\frac{1}{4}. \tag{3}$$

(1)-ből és (3)-ból y kiküszöbölésével

$$x_U=\frac{4n^3+6n^2+7n/2+3/4}{4n^2+4n+2}=n+\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{4(4n^2+4n+2)},$$

és így $x_A=n$, $x_B=n+1$ és (2) alapján

$$k=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2n+1}{4(4n^2+4n+2)}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2n+1}{4(4n^2+4n+2)}}=\frac{8n^2+6n+3}{8n^2+10n+5}=$$
$$=1-\frac{4n+2}{8n^2+10n+5}=1-\frac{1}{2n+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2n+1}}.$$

n abszolút értékének növekedésével a második tag abszolút értéke tetszés szerinti kicsire lecsökken, vagyis az arány egyre kevesebbel tér el 1-től.

Az utolsó előtti alak 2. tagjának nevezője minden n-re pozitív, számlálójának előjele az $n=-1/2$ értéken való áthaladáskor változik, így $n<-1/2$ esetén $k>1$, $n>-1/2$ esetén $k<1$, végül $n=-1/2$ esetén $k=1$. Könnyű belátni, hogy $n=-1/2$ esetén U a parabola fókuszába esik.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)