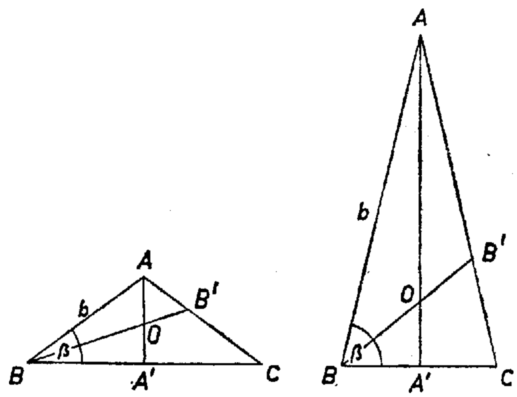
Legyenek az ABC háromszög szárai $AB=AC=b$, az alapon levő szög β, és a két szögfelező AA', BB'. Ekkor $BAC\sphericalangle=180^\circ-2\beta$, $BB'A\sphericalangle=3\beta/2$,

$$AA'=b\sin\beta,\qquad BB'=b\frac{\sin(180^\circ-2\beta)}{\sin(3\beta/2)}=\frac{2b\sin\beta\cos\beta}{\sin(3\beta/2)}.$$



1. ábra

Az előírt arány kétféleképpen állhat fenn. A $BB'=2AA'$ követelményből egyszerűsítéssel (ugyanis $b\neq 0$ és $\sin\beta\neq 0$)

$$\cos\beta=\sin\frac{3\beta}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{3\beta}{2}\right),\qquad \text{és}\qquad \beta=90^\circ-\frac{3\beta}{2},$$

$\beta=36^\circ$, a csúcsnál levő szög 108°.

$AA'=2BB'$ esetén hasonlóan

$$4\cos\beta=\sin\frac{3\beta}{2}, \tag{1}$$

illetőleg mindkét oldalt $\sin(\beta/2)=x$-szel kifejezve

$$4(1-2x^2)=3x-4x^3,\qquad 4x^3-8x^2-3x+4=0. \tag{2}$$

A bal oldal nem bontható fel két racionális együtthatós polinom szorzatára. Ugyanis, ha felbontható volna, akkor az egyik tényező elsőfokú volna, s így volna az egyenletnek racionális gyöke. Azonban csak olyan p/q racionális szám lehet gyöke az egyenletnek, amelyben p az állandó tag (pozitív vagy negatív) osztója, q pedig x^3 együtthatójának osztója, vagyis a ±4, ±2, ±1, $\pm1/2$, $\pm1/4$ számok, ezek közül viszont – amint a próbák mutatják – egyik sem gyöke az egyenletnek. – Így (2) gyökeit a középiskolai tananyag alapján nem határozhatjuk meg.

A szögek közelítő meghatározását (1) alapján végezzük. Mindenesetre $\beta>60^\circ$, mert – AA' és BB' metszéspontját O-val jelölve – ha $\beta\leqq 60^\circ$, akkor $BAO\sphericalangle=90^\circ-\beta\geqq 30^\circ$, $ABO\sphericalangle=\beta/2\leqq 30^\circ$, tehát az ABO háromszögben $AO\leqq BO$, és az OBA' derékszögű háromszögből $OA'<BO$, így $AA'=AO+OA'<2BO<2BB'$.

(1) két oldalának különbsége $\beta=60^\circ$ esetén 1, $\beta=70^\circ$ esetén $+0{,}4021$, $\beta=80^\circ$ esetén $-0{,}1716$, az utóbbi kettő ellentett előjelű, így 70° és 80° között a különbség felveszi a 0 értéket.[1] β 10°-nyi növekedésére a különbség 0,57-dal csökken; ennek a $\beta=70^\circ$-nál talált 0,40 többlet kb. 0,7 része, ezért $\beta=77^\circ$-kal próbálkozunk. Ekkor $0{,}9000-0{,}9026=-0{,}0026$ adódik, ami negatív, tehát $\beta<77^\circ$. Véve $\beta=76{,}9^\circ$-ot, $0{,}9068-0{,}9037=0{,}0031>0$ adódik, így β keresett értéke $76{,}9^\circ$ és $77{,}0^\circ$ között, van, az utóbbihoz kissé közelebb, mert $|-0{,}0026|<|0{,}0031|$, így $0{,}1^\circ$ pontossággal $\beta=77{,}0^\circ$, és a csúcsnál levő szög $26{,}0^\circ$.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. G.)

Megjegyzés. Az első eset megoldásában $\cos(90^\circ-1{,}5\beta)$ a $0^\circ<\beta<90^\circ$ intervallumban előbb nő, majd csökken, ezért gondolni kell a $(90^\circ-1{,}5\beta)=-\beta$ lehetőségre. Innen azonban $\beta=180^\circ$ adódik, nincs második megoldás.

[1] Ugyanis (1) mindkét oldala folytonosan változik, minden értéket felvesz, ami $+0{,}4021$ és $-0{,}1716$ között van.