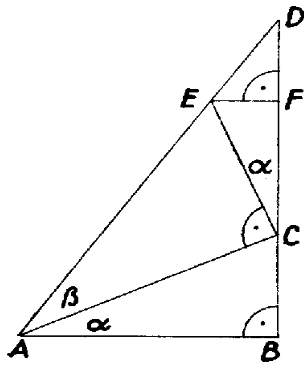


1. ábra

I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = 90°$ és $AB = 1$, továbbá a BC befogó C-n túli meghosszabbításának D pontjára $CAD\sphericalangle = \beta$ és így $BAD\sphericalangle = \alpha+\beta$, hegyesszög. Messe az AC-re C-ben állított merőleges AD-t E-ben és az E-n át BD-re állított merőleges BD-t F-ben (1. ábra). Ekkor $FCE\sphericalangle = \alpha$ és $FED\sphericalangle = \alpha+\beta$, továbbá

$$BC = \operatorname{tg}\alpha, \quad AC = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad CE = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}, \quad CF = \operatorname{tg}\beta,$$

$$EF = \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha,$$
$$DF = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta);$$

másrészt

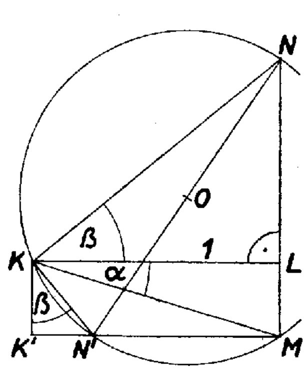
$$BC + CF + FD = BD = \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Az előbbieket ide behelyettesítve, végül $\alpha+\beta$ tangensét kifejezve

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{1}$$

Hoffer Anna (Budapest, Hámán K. g. IV. o. t.)



2. ábra

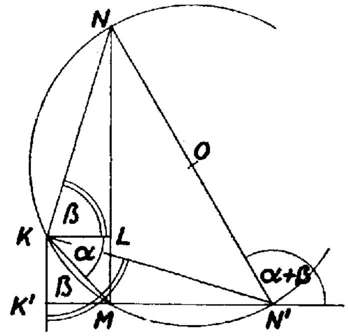
II. megoldás. Legyen a KLM és KLN háromszögekben L-nél derékszög úgy, hogy M és N az L két oldalán helyezkednek el (2. ábra), továbbá $KL = 1$, és az $LKM\sphericalangle = \alpha$, $LKN\sphericalangle = \beta$ hegyesszögek összege is hegyesszög. Ekkor a KMN háromszög köré írt kör O középpontja MN-nek azon a partján van, mint K, ugyanígy az NN' átmérő N' végpontja is, így $NN'M\sphericalangle = \alpha+\beta$, $NMN'\sphericalangle = NKN'\sphericalangle = 90°$, $N'M$ párhuzamos KL-lel. Legyen végül K vetülete $N'M$-re K', Így $K'KN'\sphericalangle = \beta$, mert szárai merőlegesek KL-re, ill. KN-re. Ekkor

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg} NN'M\sphericalangle = \frac{MN}{MN'} = \frac{ML+LN}{MK'-N'K'} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-N'K'},$$

mert $KK'ML$ téglalap. A nevező második tagja $N'K' = KK'\operatorname{tg}\beta = LM\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, így ismét

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Bozóky Szeszich Ádám (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)



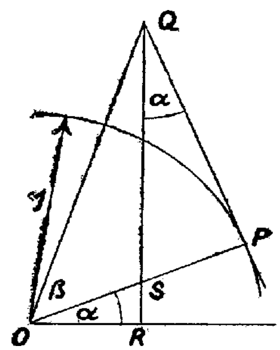
3. ábra

Megjegyzés. A bizonyítás kiterjeszthető arra az esetre is, ha $\alpha+\beta$ tompaszög (3. ábra):

$$\operatorname{tg}\,(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\,NN'M\sphericalangle=-\frac{MN}{MN'}=-\frac{ML+LN}{N'K'-MK'}=$$
$$\frac{\operatorname{tg}\,\alpha+\operatorname{tg}\,\beta}{1-N'K'}.$$

III. megoldás. Messe az $\alpha+\beta$ szög O csúcsa körül írt, egységnyi sugarú kör α és β közös szárát P-ben, a P-beli érintő β másik szárát Q-ban, és a Q-ból α másik szárára bocsátott merőleges ezt a szárt R-ben (a metszés létrejön, mert $\alpha+\beta$ hegyesszög), a közös szárt S-ben (4. ábra). Ekkor $PQS\sphericalangle=\alpha$, $PQ=\operatorname{tg}\,\beta$, továbbá

(2) $$\operatorname{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{RQ}{OR}=\frac{RS+SQ}{OR}=\operatorname{tg}\,\alpha+\frac{SQ}{OR}.$$



4. ábra

Itt $SQ=SP/\sin\alpha$, $SP=QP\ \operatorname{tg}\,\alpha=\ \operatorname{tg}\,\beta\ \operatorname{tg}\,\alpha$, másrészt $OR=OS\cos\alpha$, és $OS=OP-SP=1-\operatorname{tg}\,\alpha\ \operatorname{tg}\,\beta$. Ezért (2) második tagja

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\,\alpha\ \operatorname{tg}\,\beta}{\sin\alpha}}{(1-\operatorname{tg}\,\alpha\ \operatorname{tg}\,\beta)\cos\alpha}=$$
$$\frac{\operatorname{tg}\,\beta}{1-\operatorname{tg}\,\alpha\ \operatorname{tg}\,\beta}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{(\operatorname{tg}^2\,\alpha+1)\ \operatorname{tg}\,\beta}{1-\operatorname{tg}\,\alpha\ \operatorname{tg}\,\beta},$$

és így közös nevezőre hozással ismét (1) adódik.