I. megoldás. A kettős egyenlőtlenség mindhárom tagja pozitív. Így elég megmutatni a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenségek helyes voltát, mert nagyobb pozitív szám pozitív négyzetgyöke nagyobb.

Az első egyenlőtlenség jobb és bal oldala négyzetének különbsége a feltevések felhasználásával így alakítható.

$$\left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)-(a^2+b^2)=\frac{b}{4}(4a-3b).$$

Az utolsó kifejezés pozitív, mert $a>b$, tehát az állítás első része igaz.

Hasonlóan a második egyenlőtlenségből

$$(a^2+b^2)-\frac{64}{81}\left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)=\frac{1}{81}(17a^2-64ab+65b^2)=$$

$$\frac{1}{81}\left[a^2+(4a-8b)^2+b^2\right]=\frac{1}{81}\left[c^2+16(a-2b)^2\right]>0, \tag{2}$$

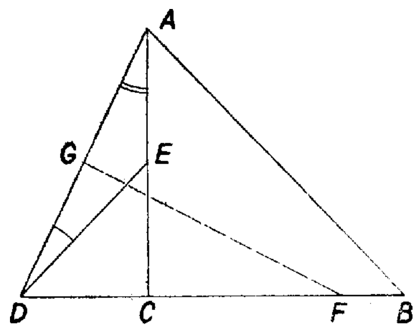
így a második rész is igaz.

Bajna Zsolt (Esztergom, Bottyány J. műszerip. techn. III. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás második részében nem használtuk fel az $a>b$ feltevést, ez a rész minden derékszögű háromszögre érvényes.

Az első rész is érvényes, mihelyt $a>3b/4$. Ezzel tágabb feltételt kaptunk az első rész érvényességéhez.

(2) szerint állandó c esetén (1) második és harmadik tagja négyzetének különbsége akkor a legkisebb, ha $a=2b$, azaz $a=2c\sqrt{5}$, $b=c\sqrt{5}$. Ekkor a különbség $c^2/81$, az egyenlőtlenségnek ez a része a $c>c\sqrt{80/81}$ alakot ölti.



II. megoldás a feladat első részéhez. Mérjük rá az ABC derékszögű háromszög $AC=b$ befogójának felét $BC=a$-nak a derékszög C csúcsán túli meghosszabbítására, és kössük össze a D végpontot A-val és az AC oldal E felezőpontjával. Így egyrészt $DE>EC=AE$, és

$$DAC\sphericalangle=DAE\sphericalangle>ADE\sphericalangle. \tag{3}$$

Másrészt $BC>AC$ miatt

$$CAB\sphericalangle>45^\circ=EDC\sphericalangle.$$

Ezt (3)-hoz adva $DAB\sphericalangle>ADC\sphericalangle=ADB\sphericalangle$, így pedig

$$DB>AB,\qquad a+\frac{b}{2}>c,$$

amint (1) első része állítja.

B-t C-höz közelítve az állítás első része nyilvánvalóan addig érvényes, amíg B el nem éri az AD szakaszra a G felezőpontjában állított merőlegesnek BC-vel való F metszéspontját. Az FDG és ADC derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$DF=\frac{DG}{DC}\cdot DA=\frac{DA^2}{2DC}=\frac{5}{2}DC,\qquad \text{így}\qquad CF=\frac{3}{2}DC=\frac{3}{4}\,AC,$$

a mondott érvényesség feltétele: $a>3b/4$, ezt a fenti megjegyzésben is láttuk.

Elekes György (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás a feladat második részéhez. Határozzuk meg, mely k számok esetén létezik olyan derékszögű háromszög, hogy teljesül

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=k\left(a+\frac{b}{2}\right). \tag{4}$$

Innen négyzetre emelés után b^2-nel osztva az a/b hányadosra kapunk egyenletet:

$$(1-k^2)\left(\frac{a}{b}\right)^2 - k^2\left(\frac{a}{b}\right) + \left(1-\frac{k^2}{4}\right) = 0$$

Ennek gyökei valósak, ha a diszkrimináns nem negatív: $5k^2 - 4 \geqq 0$.

$k = 8/9$ esetén ez a feltétel nem teljesül, így (4) sem teljesül semmilyen derékszögű háromszögre sem. Ezért (4) két oldalának nagyságviszonya állandó. Az $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ esetben a jobb oldal $40/9$, kisebb a bal oldalnál, tehát mindig a bal oldal a nagyobb, minden derékszögű háromszögre fennáll (1) második része.