I. Legyen u, v egy az első követelménynek megfelelő, relatív prím számpár, vagyis $u+v=420$. Ekkor u is, v is relatív prím 420-hoz, mert ha pl. u-nak és 420-nak volna 1-nél nagyobb közös osztójuk, az $420-u$-nak, azaz v-nek is osztója volna.

Két olyan felbontást, mely a tagok felcserélésével egymásba megy át, nem tekintünk különbözőnek, ezért előírhatjuk, hogy $u \leq v$, azaz $u \leq 210$ legyen.

Ezek szerint a keresett felbontások száma annyi, ahány a 420-hoz relatív prím szám van a 210-nél nem nagyobb természetes számok között. A továbbiakban természetes szám helyett röviden csak *számot* írunk. 420 prímtényezői 2, 3, 5 és 7, hozzá azok a számok relatív prímek, amelyek e négy prímszám egyikének sem többszörösei. Ezért u megfelelő értékeit úgy kapjuk, hogy felírjuk a számokat 210-ig, majd 2, 3, 5 és 7 többszöröseit áthúzzuk, kirostáljuk. Lesznek számok, amelyeket így többször is áthúzunk, pl. a 10 kétszer, a 2 és az 5 többszöröseként, a 210 pedig négyszer, mindegyik prímszámunk miatt.

Szorítkozzunk egyelőre 2 és 3 többszöröseinek áthúzására. Ilyen szám $210/2=105$, ill. $210/3=70$ van. A 6 többszöröseire azonban $2-2$ áthúzás esik, számuk $210/6=35$, ezek második áthúzásakor már nem új számot hagyunk el, így az eddig elhagyott számok száma $105+70-35=140$, a 210-ből 70 szám marad.

5-nek 210-ig terjedő többszöröseit úgy kapjuk, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 42$ számokat szorozzuk 5-tel. Közülük nyilvánvalóan azokat találjuk áthúzatlanul, amelyek relatív prímek 2-höz is, 3-hoz is. Számuk az előző meggondolás mintájára $42-(21+14-7)=14$, ennyi első ízbeni áthúzást végzünk, tehát már csak 56 szám marad.

Hasonlóan 7 többszöröseinek áthúzása során annyi számot húzunk át első ízben, ahány a 2, 3 és 5 számok mindegyikéhez relatív prím szám van 7-nek 1-től 210-ig terjedő többszörösei között. Ezeket 7-nek az $1, 2, \ldots, 30$ számokkal való szorzása útján kapjuk, így eddigi két meggondolásunkat kell ismételnünk 210 helyén 30-cal, majd 42 helyén 6-tal. A maradó számok száma előbb $30-(15+10-5)=10$, az 5 miatt $6-(3+2-1)=2$ számot mellőzve pedig 8.

Így u számára $56-8=48$ érték marad vissza, ennyi kéttagú felbontása van 420-nak egymáshoz relatív prím összeadandókra.

II. A második követelménynek megfelelő u, v értékpárokat a fent előállítottakból kapjuk, elhagyva azokat, amelyeknek legalább egyik tagja nem törzsszám. Ilyen elsősorban az $1+419$ felbontás, mert az 1 nem törzsszám. A további elhagyandók törzsszám osztói különböznek 2-től, 3-tól, 5-től és 7-től, másrészt legkisebb törzstényezőjük kisebb 420 négyzetgyökének egész részénél, 20-nál, tehát 11, 13, 17 és 19 valamelyike, végül csak két törzsszám összeszorzásával állhatnak elő, mert már $11^3>420$. Ezek a következők:

$$\begin{aligned}
&11^2=121;\ 11\cdot 13=143;\ 11\cdot 17=187;\ 11\cdot 19=209;\ 11\cdot 23=253;\ 11\cdot 29=319;\\
&\qquad\qquad 11\cdot 31=341;\ 11\cdot 37=407;\\
&13^2=169;\ 13\cdot 17=221;\ 13\cdot 19=247;\ 13\cdot 23=299;\ 13\cdot 29=377;\ 13\cdot 31=403;\\
&17^2=289;\ 17\cdot 19=323;\ 17\cdot 23=391;\\
&19^2=361.
\end{aligned}$$

E 18 szám közül kettő egy párba tartozik: $121+299=420$, így további 17 pár nem felel meg, összesen 18 felbontás marad el.

Ezek szerint 420 két törzsszám összegeként 30-féleképpen állítható elő.

Sükösd Csaba (Budapest, József A. g. IV. o. t.)
Fodor Magdolna (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az I. részben végzett megszámlálási eljárás általában is használható. Ha pl. a p_1, p_2, p_3 különböző törzsszámok mindegyike osztója az n számnak, akkor az n-nél kisebb és p_1, p_2, p_3 mindegyikéhez relatív prím természetes számok száma

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right). \tag{1}$$

Ugyanis a p_1, majd p_2 többszöröseinek áthúzása után maradó számok száma

$$\begin{aligned}
n-\frac{n}{p_1}-\left(\frac{n}{p_2}-\frac{n}{p_1p_2}\right)&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{n}{p_2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)=\\
&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

p_3 többszöröseit az 1-szeresétől az n/p_3-szorosáig kell áthúznunk, de csak azokat találjuk áthúzatlanul, amelyekben p_3 szorzója relatív prim p_1 és p_2 mindegyikéhez. Ezek számát úgy kapjuk, hogy az előbbi eredményben n helyére n/p_3-at írunk, és ezt (2)-ből kivonva a különbség az (1) alakra hozható.