I. megoldás. I. Az x-re és a polinomra előírt értékpárok alapján az együtthatókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$a+b+c=1, \tag{1}$$
$$4a+2b+c=1/2, \tag{2}$$
$$9a+3b+c=1/3. \tag{3}$$

Vonjuk ki (2)-t (1)-ből, majd (3)-ból, így c mindkét esetben kiesik; az adódó egyenletek összeadásával pedig b esik ki:

$$\begin{aligned} -3a-b&=1/2,\\ 5a+b&=-1/6, \qquad (4)\\ 2a&=1/3, \end{aligned}$$

így $a=1/6$, ezért (4)-ből $b=-1$, végül (1)-ből $c=11/6$, tehát a keresett polinom

$$\frac{1}{6}x^2-x+\frac{11}{6}.$$

II. Tegyük fel, hogy x olyan szám, amelyet helyettesítve polinomunk értéke $1/x$, vagyis

$$\frac{1}{6}x^2-x+\frac{11}{6}=\frac{1}{x}. \tag{5}$$

Ekkor x nem lehet 0. az egyenletet $6x$-szel szorozva

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Harmadfokú egyenletnek legfeljebb 3 gyöke lehet[1]. Tudjuk, hogy $x=1$, $x=2$ és $x=3$ teljesíti a feltételt, tehát gyök, ennélfogva több gyök nincs, nincs több olyan szám, amelyre fennáll (5). Ezt kellett bizonyítanunk.

Missura Éva (Eger, Gárdonyi G. g. II. o. t.)

II. megoldás a feladat első részére. A keresett polinomot három másodfokú polinom összegeként állítjuk elő. Mindegyikükre azt írjuk elő, hogy az adott helyek egyikén – rendre az első, a második, a harmadik helyen – az ott megadott értéket vegye fel, a másik két helyen pedig 0 értéket. Így összegük valóban mind a három helyen az ott előírt érték lesz.

Minden olyan másodfokú polinom, amely az $x=2$ és $x=3$ helyeken a 0-értéket veszi fel, $a_1(x-2)(x-3)$ alakban írható, ahol a_1 egy 0-tól különböző állandó. E polinom értéke $x=1$ esetén $2a_1$, és ez $a_1=1/2$ esetén egyenlő az itt előírt 1 értékkel.

Hasonlóan a második és a harmadik polinom

$a_2(x-1)(x-3)$, $x=2$ esetén $-a_2=1/2$, ha $a_2=-1/2$,

$a_3(x-1)(x-2)$, $x=3$ esetén $2a_3=1/3$, ha $a_3=1/6$.

Így a keresett polinom, kifejtés és összevonás után

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x-2)(x-3)-\frac{1}{2}(x-1)(x-3)+\frac{1}{6}(x-1)(x-2)&=\\ =\frac{1}{6}x^2-x+\frac{11}{6}.\end{aligned}$$

[1] Lásd: *Hódi E.–Szász G.–Tolnai J.:* Matematika az ált. gimn. IV. o. számára, 11. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962, 222. o.