Feri közlése helyes volt. Legyenek a keresett négyjegyű szám egymás utáni számjegyei A, B, C, D, ahol $A \neq 0$, viszont a többi jegy bármelyike lehet 0 is. A követelmény szerint:

$$(A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D) - (D \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + B \cdot 10 + A) =$$

$$999(A-D) + 90(B-C) = n^3, \tag{1}$$

ahol n egész szám, tehát lehet 0 és negatív szám is.

Mégis elég lesz egyelőre pozitív n-ekre szorítkoznunk. Ugyanis $n=0$ esetén $\overline{ABCD} = \overline{DCBA}$, a szám önmagának a fordítottja, 90 db $\overline{ABBA}$ alakú érdektelen megoldás adódik[1] (ugyanis az A és B által felvehető értékek száma 9, ill. 10). Továbbá előre tudjuk, hogy $\overline{ABCD}$-vel együtt a $\overline{DCBA}$ szám is megfelel, hacsak $D>0$, ekkor a különbség $-n^3$. Az ilyen megoldások számát amazokéból könnyen megállapíthatjuk.[2]

A bal oldal osztható 9-cel, így a jobb oldal is, ekkor pedig n osztható 3-mal, $n=3k$, ahol k egész (ugyanis

$$(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9(3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1,$$

ami 9-cel osztva nem 0-t ad maradékul). Ezt (1)-be beírva és 27-tel osztva

$$37(A-D) + 10 \cdot \frac{B-C}{3} = k^3, \tag{2}$$

eszerint $B-C$ értéke csak 0, ± 3, ± 6 és ± 9 lehet, vagyis a bal oldal második tagja 0, ± 10, ± 20, vagy ± 30. Másrészt $A-D$ értéke a 0, 1, 2, …, 9 számok valamelyike, így a bal oldal nem nagyobb $9 \cdot 37 + 30 = 373$-nál. Az ennél nem nagyobb pozitív köbszámok:

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125, \quad 216, \quad 343,$$

és 37 szóba jövő többszörösei:

$$37, \quad 74, \quad 111, \quad 148, \quad 185, \quad 222, \quad 259, \quad 296, \quad 333.$$

Innen könnyen kiválaszthatjuk azokat a számpárokat, amelyek eltérése 0, vagy 10, vagy 20, vagy 30:

I.	$37 - 27 = 10$,	ekkor	$A-D=1$,	$C-B=3$,	$k=3$,	$n=9$;
II.	$74 - 64 = 10$,	ekkor	$A-D=2$,	$C-B=3$;		
III.	$333 - 343 = -10$,	ekkor	$A-D=9$,	$B-C=3$.		

Az I. számpár esetében A az 1, 2, …, 9 értékeket veheti fel, hogy $D \geqq 0$ teljesüljön, hasonlóan C a 3, 4, …, 9 értékeket, így $B \geqq 0$, e két jegy megválasztása egymástól független, ezért az adódó megoldások száma $9 \cdot 7 = 63$. Hasonlóan a II. számpárból $8 \cdot 7 = 56$, a III.-ból $1 \cdot 7 = 7$ megoldást kapunk, ezek szerint $n>0$ esetén a megoldások száma $63 + 56 + 7 = 126$.

A negatív n-ekre vezető megoldásokat úgy kapjuk, hogy (2) mindkét oldalát -1-gyel szorozzuk. Minthogy azonban nem lehet $D=0$, azért D részére az I.– III. számpárok mindegyikének esetében 1-gyel kevesebb érték felel meg, a megoldások száma

$$8 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 0 \cdot 7 = 105.$$

Így pedig az olyan négyjegyű számok száma, amelyekből a fordítottjukat kivonva 0-tól különböző egész szám köbét kapjuk, 231; Ferinek igaza volt.

A Gábor által észrevett megoldás a II. számpárból adódik ki.

Herényi István (Budapest, I. István g. III. o. t.)

[1] Tartsuk Ferit komolynak, hogy nem dicsekszik semmitmondó megoldásokkal.

[2] Itt viszont megengedjük Ferinek, hogy nagyobb számot mondjon. Miért nem *természetes számot* írt elő Gábor! Különben is egy szám felírásakor nem mindjárt arra gondol az ember, hogy nagyobb-e a szám a fordítottjánál.