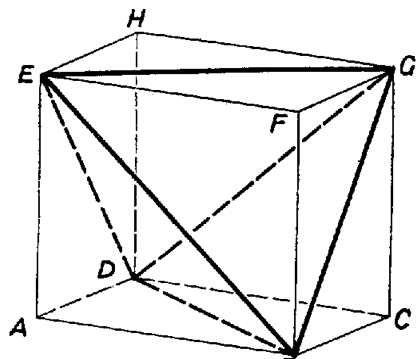
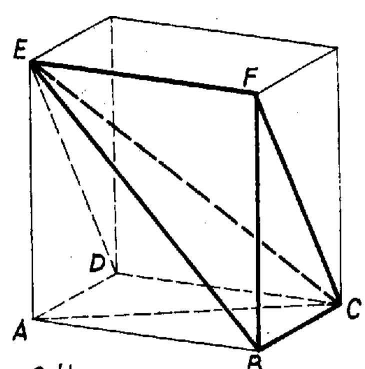
A szétdarabolást nyilvánvalóan síkmetszetekkel hajtjuk végre. Minden tetraédernek mind a négy lapja háromszög, és bármelyik két lapjának van közös éle. Ezért a keresett szétdarabolás útján a kockának mind a 6 lapja háromszögekre esik szét, így a felületén legalább 12 háromszög keletkezik, és a szétdaraboló síkok is háromszögben metszik a kockát, vagy egymás metszeteit háromszögekre darabolják. – Másrészt egy tetraéder a kocka legfeljebb 3 lapjának tartalmazhatja részét, mert a kocka lapjaiból bárhogyan választott 4 között van 2 párhuzamos, ezért hátra levő lapját (vagy lapjait) egy metsző sík állítja elő. Így a kocka lapjainak részei legalább (12 : 3 =)4 tetraéderhez fognak tartozni.



1.ábra

Lehet megadni olyan feldarabolást, amelynél éppen 4 tetraéder osztozik a kocka felületén: a kocka egy kiszemelt csúcsában összefutó 3 lapját az ezzel a csúccsal szemben fekvő átlókkal osztjuk két-két háromszögre – az 1. ábrán az F-ben összefutó lapokat az EB, BG, ill. GE átlójukkal –, majd a kiszemelt csúccsal szomszédos csúcsokba befutó harmadik lapot az onnan kiinduló átlójukkal, a BD, GD, ill. ED átlóval. Így az A, C és H csúcsokból nem indul ki kettévágó átló egyik oda futó lapban sem, a belőlük kiinduló 3–3 él végpontjait páronként összekötő négyzetátlók pedig ugyanúgy egy-egy síkban vannak, mint EB, BG és GE, ennélfogva az F, A, C, ill. H csúcsban összefutó 3–3 derékszögű háromszöget rendre az EBG, EBD, BGD, ill. GED sík metszi le a kocka felületéről, ad velük együtt egy-egy tetraédert, és ezek együttesen valóban felhasználják a 6 kockalapból keletkezett 12 háromszöget.

A kockából 4 tetraédert lemetsző 4 háromszöglap a kocka belsejében levő $BDEG$ tetraéder teljes felületét adja, így a kockát 5 tetraéderre bontottuk.



2.ábra

Ha a kocka két szomszédos, átlósan kettévágott lapjáról úgy választunk 1–1 a közös élhez illeszkedő háromszöget, hogy a kettévágó átlók az él nem ugyanazon végpontjából indulnak ki (2. ábra, EBF, és BCF), e két lap már kijelöli egy tetraéder 4 csúcsát, és ennek további két lapja a kocka belsejében van, így a kocka felületén maradt 10 derékszögű háromszöglap felhasználásához nem elég 3 tetraéder, tehát nem kapunk kevesebb tetraéderre való szétdarabolást. (Hasonlóan haladva tovább 6 tetraédert kapunk, a kocka $ABCDEF$ feléből még $ECBA$-t és $ECAD$-t.)

Racskó Péter (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)
Havas János (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kocka éleinek a rész-tetraéderekre való szétosztásával is megkapjuk, hogy a tetraéderek száma legalább 4.

2. Számos dolgozat tartalmazza a következő gondolatmenetet. Ha a kockából levágunk egy tetraédert, a maradék testen a csúcsok száma legfeljebb 1-gyel lehet kevesebb, 7 vagy több csúcs marad. Legalább 4-szer kell levágni 1–1 tetraédert, hogy a maradéktest 4-csúcsú test, vagyis tetraéder lehessen, tehát a részek száma legalább 5. – Ebben az a kis hiány, hogy indokolás nélkül feltételezték: a szétdarabolás során mindig van olyan résztetraéder, amelyet lehet egyetlen lapja mentén való síkmetszéssel elválasztani a többiektől, holott a 2. ábra minden tetraédere csak két vágással emelhető ki. (Ha viszont első lépésben pl. a $CDEF$ átlós síkmetszettel vágjuk ketté a kockát, akkor egyik rész sem tetraéder.)