I. A színusz-tétel szerint a háromszög két szöge színuszának aránya egyenlő a szemben fekvő oldalak arányával; mondhatjuk tehát, hogy az ABC háromszög egymás utáni csúcsaiba helyezett m_A, m_B, m_C tömeg arányos rendre a BC, CA, AB oldal hosszával.

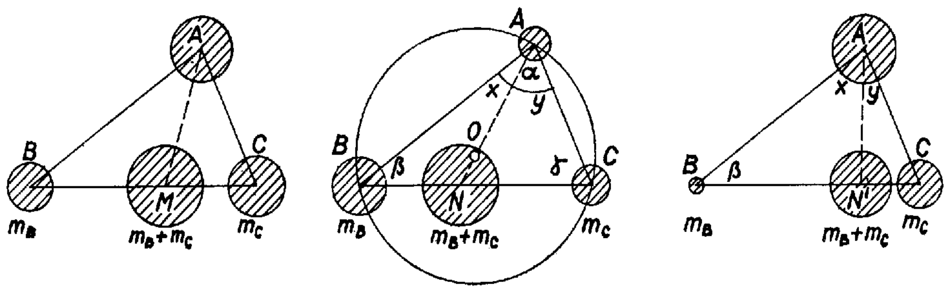
Így a B és C csúcsokba helyezett tömeg-pár M súlypontja[1] a BC szakasznak az a pontja, amelyre

$$MB : MC = m_C : m_B = AB : AC.$$

Ismeretes, hogy ugyanebben a pontban metszi a BC oldalt a BAC szög (belső) felezőegyenese, eszerint AM a szögfelező.

A három tömegpontból álló rendszer súlypontja az idézett tétel szerint az AM szakaszon, vagyis az A-ból induló szögfelezőn van.

Az első két pont más megválasztásából hasonlóan adódik, hogy a keresett súlypont mindegyik szögfelezőn rajta van, ezért azonos a háromszögbe írt kör középpontjával.



II. A második esetben legyen a B, C tömeg-pár súlypontja N, és fejezzük ki a BN, CN szakaszokat a BNA, CNA háromszögből a $BAN = x$, ill. $CAN = y$ szögek felhasználásával, a színusz-tétel alapján.

$$BN : CN = \underline{\frac{AN \sin x}{\sin\beta} : \frac{AN\sin y}{\sin\gamma}} = m_C : m_B = \tag{1}$$
$$= \sin 2\gamma : \sin 2\beta = \underline{2\sin\gamma\cos\gamma : 2\sin\beta\cos\beta.}$$

Hegyesszög kétszeresének színusza pozitív, ezért N a BC szakasz belső pontja, tehát $x + y = \alpha$, és így az aránypár aláhúzott részeiből az addíció tételek alkalmazásával

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(\alpha - y)}{\sin y} = \sin\alpha \operatorname{ctg} y - \cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}, \tag{2}$$
$$\operatorname{ctg} y = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{-\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta.$$

Eszerint a CN szakasszal szemközti szög $y = CAN\sphericalangle = 90^\circ - \beta$. Ugyanekkora a CAO szög is, ahol O a háromszög körülírt körének középpontja, hiszen az ACO egyenlő szárú háromszög O-nál levő szöge 2β.

Így az I. esethez hasonlóan kapjuk, hogy a tömegpontrendszer súlypontja a háromszög köré írt kör középpontja.

III. A tangensekkel arányos tömegek esetében az előbbi számítás annyiban módosul, hogy (1) utolsó arányában $\cos\gamma$ és $\cos\beta$ szorzó helyett osztó lesz, (2) jobb oldalára a reciproka kerül, β és γ felcserélődik, így $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\gamma$ adódik. Eszerint y a γ pótszöge, a B-be és C-be helyezett tömeg-pár súlypontját az A-ból húzott magasság metszi ki, és a keresett súlypont – az első eset záró meggondolásához hasonlóan – a háromszög magassági pontja.

Megjegyzés. Az I. részben nem használtuk ki, hogy a háromszög hegyesszögű, az az eredmény minden háromszögre érvényes. Érvényes a II. rész eredménye is, valamint a III-é is a derékszögű háromszög kivételével, ezekben az esetekben a tompaszög csúcsában elhelyezett tömeget negatívnak gondoljuk, ill. oda fölfelé ható erőt gondolunk (alkalmasan elhelyezett csigán át hat a tömeg súlya).

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

[1] Lásd pl. az 1246. feladat I. megoldását, K. M. L. 29 (1964) 117. o.