Válasszuk a betűzést úgy, hogy teljesüljön

$$a \geqq b \geqq c \geqq 2, \tag{2}$$

és írjuk át a bal és a jobb oldal K különbségét a következő alakba

$$K = (\log_{(a+b)} c^2 - 1) + (\log_{(b+c)} a^2 - 1) + (\log_{(c+a)} b^2 - 1) =$$
$$= \log_{(a+b)} \frac{c^2}{(a+b)} + \log_{(b+c)} \frac{a^2}{b+c} + \log_{(c+a)} \frac{b^2}{c+a},$$

ugyanis bármely pozitív, az egységtől különböző x esetén $\log_x x = 1$. Felhasználva még, hogy $x > 1$, $y > 1$ és $z \geqq x$ esetén

$$\log_z y = \frac{\log_x y}{\log_x z} \leqq \log_x y,$$

mert a tört nevezője nem kisebb 1-nél, a 2. és a 3. tag helyett is $a+b$ alapú logaritmust írva K-t csökkentjük vagy változatlanul hagyjuk:

$$K \geqq \log_{(a+b)} \frac{c^2}{a+b} + \log_{(a+b)} \frac{a^2}{b+c} + \log_{(a+b)} \frac{b^2}{c+a} = \tag{3}$$
$$= \log_{(a+b)} \frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b^2}{c+a},$$

ugyanis (2) miatt $a+b \geqq a+c \geqq b+c$. Az utolsó alakban a logaritmus alapja $a+b \geqq 4 > 1$, így a jobb oldal, és vele K is, akkor nem negatív, ha 1-nél nem kisebb szám logaritmusáról van szó.

Ez a követelmény teljesül, ugyanis a számot

$$\frac{ab}{a+b} \cdot \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{ac}{a+c}$$

alakban írva egyik tényező sem kisebb 1-nél, hiszen (2) miatt pl.

$$ab \geqq 2a \geqq a+b. \tag{4}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. – (1)-ben akkor áll egyenlőség, ha mind (3)-ban, mind (4)-ben egyenlőség áll, vagyis ha

$$a+b = b+c = c+a, \quad \text{azaz} \quad a = b = c,$$

ill. ha $b = 2$, vagyis a közös érték 2.

Nagy Klára (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Kissé más úton jutunk célhoz, ha mindjárt kezdetben egy közös logaritmus-alapra térünk át, amelyről csak azt tesszük fel, hogy 1-nél nagyobb. Ekkor (1) bal oldala

$$L = 2\left(\frac{\log c}{\log(a+b)} + \frac{\log a}{\log(b+c)} + \frac{\log b}{\log(c+a)}\right)$$

(a közös logaritmus-alapot nem írtuk ki). Az első tört csökken, ha nevezője helyére a nagyobb, vagy vele egyenlő

$$\log ab = \log a + \log b$$

kifejezést írjuk – ugyanis az (eredeti) feltevés miatt $(a-1)(b-1) \geqq 1$, és így $ab \geqq a+b$ –, és mindez érvényes a további két tört hasonló alakítására is:

$$L \geqq 2\left(\frac{\log c}{\log a + \log b} + \frac{\log a}{\log b + \log c} + \frac{\log b}{\log a + \log c}\right)$$

(felhasználtuk azt is, hogy mindegyik számláló és mindegyik nevező pozitív). Jelöljük a három nevezőt rendre p, q, r betűvel, ekkor pl. $\log c = (-p+q+r)/2$, így

$$L \geqq \left(\frac{-p+q+r}{p} + \frac{p-q+r}{q} + \frac{p+q-r}{r}\right) =$$
$$= \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q}\right) + \left(\frac{r}{p} + \frac{p}{r}\right) - 3.$$

Itt mindegyik zárójelben 2-nél nem kisebb szám áll, mert pl. az első összegre

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2=\frac{p^2+q^2-2pq}{pq}=\frac{(p-q)^2}{pq}\geqq 0.$$

Ennélfogva $L\geqq 3$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)