I. Az adott kifejezésben $n-1$ osztási jel szerepel. Minden osztás eredményét, ha egy újabb osztás osztója vagy osztandójaként lép fel, zárójelbe tesszük. Az utoljára végzett osztás eredményét már fölösleges zárójelbe tenni, így a zárójel-párok (a kezdő és végző zárójelek) száma $n-2$. Eszerint n legkisebb szóba jövő értéke 3.

$n=3$ esetén 2 sorrend lehetséges:

$$(x_1:x_2):x_3 = x_1/(x_2x_3); \qquad \text{az osztások sorrendje: } 1,\ 2,$$

$$x_1:(x_2:x_3) = (x_1x_3)x_2; \qquad \text{az osztások sorrendje: } 2,\ 1. \tag{2}$$

A sorrend rövid leírása céljára az osztásjelekhez hozzárendeltük a közvetlenül előtte álló x indexét.

$n=4$ esetén 3-szor ennyi, azaz 6 sorrend gondolható, bármelyik osztást véve utolsónak, a maradó 2 osztásra 2 sorrend áll fenn. Azonban az 1, 3, 2 és 3, 1, 2 sorrendek közt nincs különbség, hiszen ha két hányados hányadosát képezzük, az osztóban és osztandóban végzendő osztás sorrendjére a zárójelek nem adnak semmilyen előírást. Így a 3 zárójel pár különböző elhelyezései:

sorrend :	1, 2, 3 :	$((x_1:x_2):x_3):x_4$;	2, 3, 1 :	$x_1:((x_2:x_3):x_4)$;
	2, 1, 3 :	$(x_1:(x_2:x_3)):x_4$;	3, 2, 1 :	$x_1:(x_2:(x_3:x_4))$.
1, 3, 2 és	3, 1, 2 :	$(x_1:x_2):(x_3:x_4)$;		

számuk 5, a különböző törtek pedig rendre

$$\frac{x_1}{x_2x_3x_4}, \quad \frac{x_1x_3}{x_2x_4}, \quad \frac{x_1x_4}{x_2x_3}, \quad \frac{x_1x_3x_4}{x_2}, \tag{3}$$

számuk csak 4, mert a 3, 2, 1 sorrend azonos törtet ad a 2, 1, 3 sorrenddel.

$n=5$ esetén célszerű lesz felhasználni az eddigieket. Egyelőre csak az utoljára végzendő osztást megválasztva mind az osztandó, mind az osztó összes különböző alakjait megadja (2) vagy (3). Így 4 aleset van:

$$A:\quad (x_1:x_2:x_3:x_4):x_5; \qquad C:\quad (x_1:x_2):(x_3:x_4:x_5);$$

$$B:\quad (x_1:x_2:x_3):(x_4:x_5); \qquad D:\quad x_1:(x_2:x_3:x_4:x_5).$$

A-ban a további zárójelek elhelyezésével az osztandó mindig (3) valamelyik törtje, és az eredmény mindig úgy adódik, hogy a nevezőt szorozzuk x_5-tel; így csupa különböző törtet kapunk, felírásukat mellőzzük. A B alesetben a (2) kifejezéseket kell szoroznunk x_5/x_4-gyel, az eredmény (4) első két törtje. A C-ben az osztandó mindig x_1/x_2, az osztó kétféle, a (2) alattiakból kaphatók, mindegyik indexet 2-vel növelve: $x_3/(x_4x_5)$ ill. $(x_3x_5)/x_4$. Az elsőt véve adódik (4) harmadik törtje, a második osztóval adódó törtet már megkaptuk az A alesetben. Végül a D alesetben az osztókat (3)-ból kapjuk, minden indexet 1-gyel növelve, de csak az első osztó esetében kapunk új törtet, ez a (4) negyedik törtje. Ezek szerint 8 különböző törtet találtunk.

$$\frac{x_1x_5}{x_2x_3x_4}, \quad \frac{x_1x_3x_5}{x_2x_4}, \quad \frac{x_1x_4x_5}{x_2x_3}, \quad \frac{x_1x_3x_4x_5}{x_2}. \tag{4}$$

A (4) alatti 4 tört a (3) alattiakból a számlálónak x_5-tel való szorzásával adódik, vagyis $n=4$-ről $n=5$-re áttérve (3) mindegyik törtjéből 2 újat kaptunk, x_5-tel a nevezőt, ill. a számlálót szorozva. Máshogy nem is kapcsolható x_5 az eddigi törtekhez. Ugyanígy állt elő (2) két törtje x_1/x_2-ből x_3 kétféle hozzákapcsolásával, majd (2)-ből a (3) alatti 4 tört.

Így x_3, x_4 és x_5 minden lehetséges módon elhelyezve előfordult a nevezőben és a számlálóban, és a különböző törtek száma mindegyik hozzávételnél megkétszereződött. x_1 azonban csak a számlálóban állhat, csak osztandó lehet, mert nem áll előtte osztási jel, x_2 viszont csak a nevezőben állhat, mert vagy ő maga osztó, vagy ő egy több egymás utáni x_i számból alakuló osztónak az osztandója.

II. Azt állítjuk, hogy az $x_1:x_2:\ldots:x_n$ kifejezésből a zárójelek különböző elhelyezésével annyi különböző tört képezhető, ahányféleképpen $x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n$ helye megválasztható a számlálóban és a nevezőben (és mint már láttuk, minden törtben x_1 a számlálóban, x_2 a nevezőben áll). Ilyen elrendezés 2^{n-2} van, mert a nem rögzített számok száma $n-2$. Azt kell csak belátnunk, hogy minden ilyen tört előáll a zárójelek alkalmas elhelyezésével.

Feltesszük, hogy állításunk igaz, ha n helyére valamely $k(\geq 2)$ egész számot írunk, vagy a $2,\ 3,\ \ldots,\ k-1$ számok bármelyikét. (Ez, mint láttuk, $k=5$ esetén igaz.) n helyére $k+1$-et írva x_{k+1} a kívánt törtben vagy a nevező, vagy a számláló tényezője. Az x_{k+1} elhagyásával maradó törthöz a feltevés szerint tartozik a $k-2$ zárójel-párnak legalább egy megfelelő elhelyezése. Azokat a törteket, amelyekben x_{k+1} a nevezőben áll, megkapjuk úgy, hogy az utoljára végzendő osztás osztójának magát x_{k+1}-et vesszük, osztandójának pedig a visszamaradt törtet, vagyis az új zárójel-pár kezdő zárójelét x_1 elé, végző zárójelét x_k után tesszük ki (az esetleg már ott levő zárójelek elé, ill. után). Valóban, tört osztásakor az osztóval a nevezőt szorozzuk.

Ha pedig x_{k+1}-nek a kívánt tört számlálójában kell állnia, akkor az eddig kijelölt utolsó osztás osztójának osztójaként írjuk x_{k+1}-et, vagyis közvetlenül ezen osztás jele után teszünk egy új kezdő zárójelet, a végző zárójelet pedig x_{k+1}

után. Ekkor az A/B alakú kifejezésből a következő keletkezik: $A/(B/x_{k+1})=(A/B)\cdot x_{k+1}$, tehát A/B számlálóját kell még x_{k+1}-gyel megszorozni.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Vesztergombi Katalin (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)
Szántó Ottó (Pécs, Zipernovszky K. Gépip. T.)

Megjegyzés. Az $n=5$ esetben használt gondolatot továbbvíve meg lehet mutatni, hogy az $n-2$ zárójel-pár különböző elhelyezéseinek száma:

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Az érdeklődőknek ajánljuk az 1187. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzés [1] elolvasását.

[1] K.M.L. 26 (1963) 125–127. o.