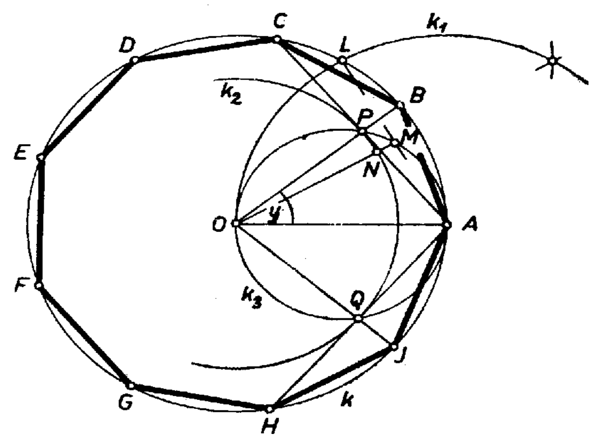
I. A közelítő egyenlőségben szereplő 50°-os szög a szabályos 9-szög egy oldalához tartozó 40°-os középponti szögnek pótszöge, ezért közelítőleg ($5\cdot 10^{-5}$-nél kisebb hibával)

$$\cos 40^\circ \approx \sin 60^\circ - 1/10,$$

másrészt $\sin 60^\circ$ az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága.

Eszerint egy szabályos háromszög magasságából az oldal $1/10$ részét kivonva, és a különbség, mint befogó fölé a háromszög-oldallal egyenlő átfogójú derékszögű háromszöget szerkesztve, a befogó melletti szög adja a 40° fenti közelítő értékét. Ennek alapján az O középpontú és r sugarú körbe az alábbiak szerint szerkeszthetünk közelítőleg szabályos 9-szöget, amelynek egy csúcsa a kör A pontja.



Messe k-t az A körül r sugárral írt k_1 kör L-ben, az AL húrt az O-ból rá bocsátott merőleges M-ben (e merőleges egy pontját k_1-ből mindjárt kimetszi az L körüli r sugarú kör). Mérjük fel M-től O felé az $r/10$ szakaszt,[1] legyen a végpont N. Az O körüli ON sugarú k_2 kör és az OA átmérőjű k_3 kör metszéspontjai legyenek P és Q. Messe k-t az OP, AP, AQ, OQ félegyenes rendre a B, C, H, J pontban. Ekkor H, J, A, B, C a közelítő 9-szög egymás utáni csúcsai.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy a HJ, JA, BC ívek egyenlők AB-vel, az utóbbihoz tartozó AOP középponti szög pedig közelítőleg 40°, hiszen AP merőleges OP-re, és így

$$\cos AOP = \frac{OP}{OA} = \frac{ON}{OA} = \frac{OM-MN}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{10} \approx \cos 40^\circ.$$

A hátra levő csúcsok előállítása végett legyen k és a C körüli, CB sugarú kör új metszéspontja D; a további E, F, G pontokat pl. a kisebb HD ív ismételt felezésével kaphatjuk. Így az $ABCDEFGHJ$ 9-szög körbe írt, H-tól A-n át D-ig menő oldalai egyenlők, és D-től F-en át H-ig menő oldalai ugyancsak egyenlők.

II. Legyen $AOP\sphericalangle = y$. Így $\cos y = (5\sqrt{3}-1)/10$, és az 1308. feladat megoldásának[2] gondolatát követve, majd a négyzetgyököt a könnyen adódó, 8 tizedes pontosságú 1,732 050 80 alsó közelítő értékkel pótolva

$$\cos 3y = \frac{15\sqrt{3}-151}{250} = \frac{60\sqrt{3}-604}{1000} > -0{,}500\,076\,96$$

(az utolsó jegyben az abszolút értéket fölkerekítettük), tehát mindenesetre $\cos 3y > -0{,}500\,08$.

Tudjuk, hogy $\cos 120^\circ = -0{,}5000$, és az iskolai négyjegyű függvénytáblázat szerint 4 tizedesre kerekítve $\cos 120{,}1^\circ = -0{,}5015$. Meg akarjuk becsülni, legfeljebb mekkora eltérést okoz $3y$ és 120° között a koszinuszaikban mutatkozó legfeljebb $8\cdot 10^{-5}$ eltérés. A keresett eltérés akkor adódik legkedvezőtlenebbnek, legnagyobbnak, ha a koszinusz függvény 120° körüli változására azt a legkisebb értéket vesszük alapul (abszolút értékben értve), amire a táblázatból következtetni lehet. A kerekítés miatt

$$-0{,}501\,55 \le \cos 120{,}1^\circ \le -0{,}501\,45,$$

eszerint a 120° és $120{,}1^\circ$ közti $0{,}1^\circ$ közre a koszinusz-függvény változása legalább $145\cdot 10^{-5}$, ezért – a változást, mint szokás, egyenletesnek véve – a keresett változás legfeljebb

$$\frac{8\cdot 10^{-5}}{145\cdot 10^{-5}}\cdot 0{,}1^\circ = \frac{8}{145}\cdot 360'' < 20''.$$

Eszerint y kevesebbel haladja meg a 40°-ot, mint $7''$.

Továbbmenve az A-t tartalmazó HOD szög többlete 200°-hoz képest (amennyinek kellene lennie) kisebb $35''$-nél, a másik HOD szög hiánya 160°-hoz képest ugyancsak kisebb, mint $35''$, így a D-től H-ig terjedő oldalakhoz tartozó középponti szög hiánya 40°-hoz képest kisebb $9''$-nél, ami a középponti szög pontos értékének 1/16 000 része.

Ferenczi György (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

---

[1] Ennek megszerkesztését itt nem részletezzük; egy lehetőséget ad a 961. gyakorlat, kitűzését lásd K. M. L. 30 (1965) 28. o.

[2] K. M. L. 30 (1965) 113. o.