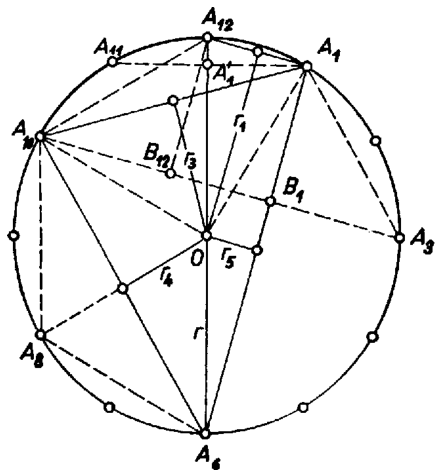

A négy szabályos 12-szög hasonló, ezért területeik aránya megegyezik valamilyen megfelelő lineáris méretük négyzeteinek arányával. Legyen beírt körük sugara, azaz a kör O középpontjának az oldaltól, az egymás utáni átlóktól való távolsága rendre r_1, r_3, r_4, r_5, így

$$t_1 = kr_1^2, \qquad t_3 = kr_3^2,$$
$$t_4 = kr_4^2, \qquad t_5 = kr_5^2,$$

ahol k arányossági tényező. Ezek szerint elég azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{r_1^2 + r_5^2}{2} = r_3^3, \tag{1}$$

$$\sqrt{r_1^2 r_5^2} = r_4^2 \tag{2}$$

S-nek az A_1 csúcsból a szomszédos A_{12} csúcsba húzott oldala és a másik irányban ötödik csúcsba, A_6-ba húzott átlója merőlegesek, ugyanez áll az O-ból rájuk bocsátott, r_1, ill. r_5 hosszúságú merőlegesre, ezért (1) számlálója

$$r_1^2 + r_5^2 = OA_1^2 = r^2,$$

ahol r az S köré írt kör sugara.

A_1A_{10} a körbe írt négyzet oldala, r_3 pedig ennek fele.

$$A_1A_{10}^2 = 2r^2, \qquad \text{ezért} \qquad r_3^2 = A_1A_{10}^2/4 = r^2/2,$$

ezek szerint (1) két oldala valóban egyenlő.

Az előzők szerint $r_1 = A_1A_6/2$, $r_5 = A_1A_{12}/2$, így (2) bal oldalán álló szorzatuk egyenlő az $A_1A_6A_{12}$ derékszögű háromszög területének felével. Ezt másképpen az $A_6A_{12} \cdot A_1A_1'$ szorzat negyedrésze adja meg, ahol a második tényező az A_1-ből húzott magasság, ami fele az r-rel egyenlő A_1A_{11}-nek, az első tényező pedig $2r$. Ezért $r_1r_5 = r^2/4$.

Másrészt r_4, mint pl. az A_6A_{10} átló O-tól mért távolsága, fele $OA_8 = r$-nek, mert $OA_6A_8A_{10}$ rombusz, így $r_4^2 = r^2/4$. Ezzel (2)-t igazoltuk.

Palotás Árpád (Pannonhalma, Benedek-rendi g. IV. o. t.)

Megjegyzés. r_1 és r_5 külön is meghatározhatók. Az ábra jelöléseivel

$$2r_1 = A_1A_6 = A_{10}A_3 = A_{10}B_1 + B_1A_3 = A_1A_{10}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + A_1A_3\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

mert $A_1A_{10}B_1$ egy egyenlő oldalú háromszög fele, $A_1A_3B_1$ pedig egyenlő szárú derékszögű háromszög. Másrészt

$$2r_5 = A_{12}A_1 = B_{12}B_1 = A_{10}A_3 - 2B_1A_3 = 2r_1 - \sqrt{2}A_1A_3,$$

és így

$$r_1 = \frac{r}{4}\,(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \qquad r_5 = \frac{r}{4}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

amiből már szorzatuk és négyzetösszegük könnyen kiszámítható.