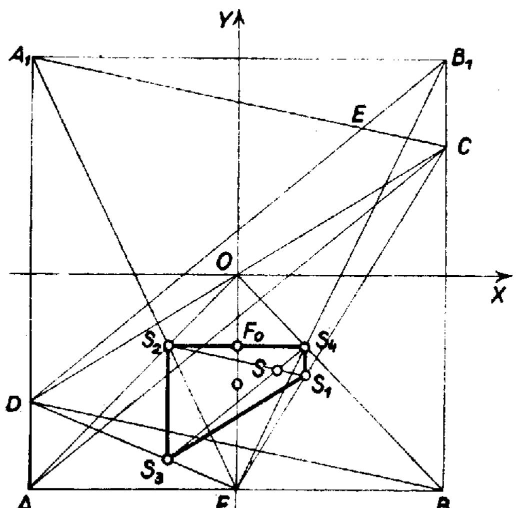
I. megoldás. Helyezzünk koordinátarendszert az ábrára, tengelyeknek a négyzet középvonalait véve. Legyen a kettévágó egyenes egyenlete $y = mx$. A szimmetria miatt elég a $-1 \leq m \leq 1$ értékekre szorítkoznunk és a kettévágott négyzet alsó felének súlypontját tekintenünk, hiszen a felső rész ebből 180°-os forgatással áll elő, ha pedig a kettévágó szakasz az Y-tengellyel zár be kisebb szöget (és így $|m| > 1$), akkor a már vizsgált esetnek az egyik átlón való tükörképével állunk szemben.

Legyen a négyzet alsó két csúcsa A $(-3;-3)$ és B $(3;-3)$, ekkor az alsó trapéz további két csúcsa C $(3;3m)$ és D $(-3;-3m)$.



1. ábra

A trapézt az AC átlóval kettévágva az ACB háromszög súlypontja S_1 $(1; m-2)$, az ACD háromszögé pedig az állandó OA súlyvonalat harmadoló S_2 $(-1;-1)$ pont. A trapéz keresett S (x,y) súlypontja rajta van e két súlypont összekötő egyenesén, tehát kielégíti az S_1S_2 egyenes egyenletét:

$$y = \frac{m-1}{2}(x+1) - 1.$$

Hasonlóan a BD átlóval való kettévágás után a BDA háromszög S_3 $(-1;-m-2)$ súlypontját a BDC háromszög S_4 $(1;-1)$ súlypontjával összekötő egyenes egyenletét is kielégítik S koordinátái:

$$y = \frac{m+1}{2}(x-1) - 1.$$

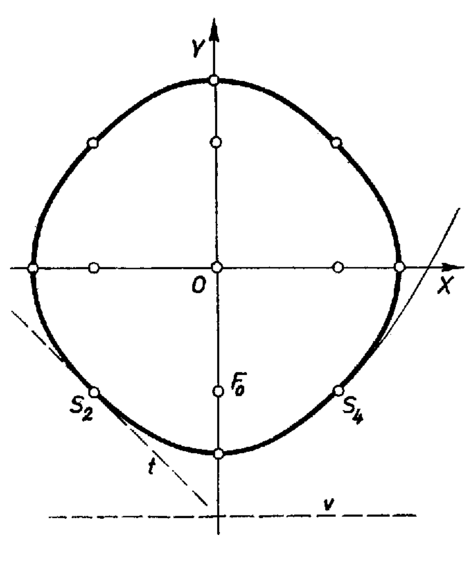
A két összefüggésből

$$x = m, \qquad y = \frac{m^2-3}{2}.$$

Így az $ABCD$ trapéz súlypontjának mértani helye (m kiküszöbölésével) az

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

parabolaív.



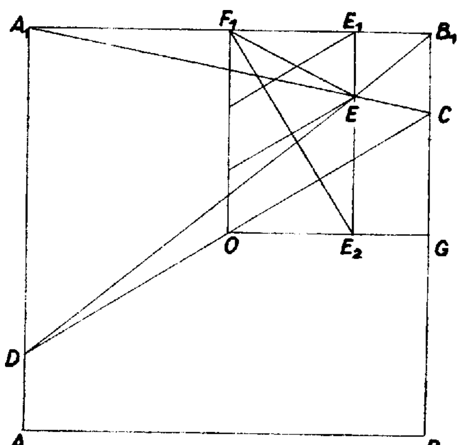
2. ábra

A parabola csúcsa az AB-re merőleges oldalfelező $(0;-3/2)$ alsó negyedelő pontja, tengelye ez az oldalfelező, F_0 fókusza a $(0;-1)$ pont, az oldalfelező alsó harmadoló pontja, vezéregyenese az oldalfelezőt alsó 6-od-részében metszi. A parabolaív végpontjai S_2 és S_4, ugyanis $m=-1$ esetén az ABC, $m=1$ esetén pedig az ABD háromszög elfajul a négyzet AB oldalává, tömege 0-ra csökken.

S_2-ben és S_4-ben a parabolaív félérintője 45° szöggel hajlik a tengelyhez, vagyis párhuzamos a B-ből, ill. A-ból kiinduló átlóval. Ennélfogva az első bekezdésben vázolt teljes mértani helynek, a 4 parabolaívből álló, 4 tengelyű, zárt görbe vonalnak a csatlakozási pontokban is van érintője.

Domokos Zsuzsanna (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva ismét csak a négyzet AB oldalára merőleges oldalakat metsző egyenesekkel lemetszett $ABCD$ trapézok S súlypontját vizsgáljuk. A négyzet másik két csúcsa legyen B_1 és A_1, az AB szakasz felezőpontja F. Ekkor S_2, mint az AO szakasz O felőli harmadoló pontja, az ABA_1 háromszögnek is súlypontja, így S_2 az A_1F szakasz F felőli harmadoló pontja, és hasonlóan S_4 a B_1F szakasz F felőli harmadoló pontja. Az $S_2S_4S_1S_3$ trapéz tehát az A_1B_1CD trapéz F-ből harmadára kicsinyített képe. Elég tehát az utóbbi trapéz átlói E metszéspontjának a mértani helyét vizsgálni.



3. ábra

Messe az E-ből A_1B_1-re bocsátott merőleges A_1B_1-et E_1-ben, akkor az A_1ED, CEB_1 hasonló háromszögekből, továbbá a párhuzamosokkal elmetszett A_1B_1D szögből kapjuk, hogy

$$\frac{A_1D}{CB_1}=\frac{DE}{EB_1}=\frac{A_1E_1}{E_1B_1}.$$

Másrészt viszont $A_1E_1+E_1B_1=A_1D+DA=A_1D+CB_1$, így kell hogy $E_1B_1=CB_1$ (és $A_1E_1=A_1D$) legyen. Legyen O merőleges vetülete B_1C-n G, E vetülete OG-n E_2. Ekkor a B_1F_1OG négyzetet középpontja körül 90°-kal elforgatva F_1E_2 átmegy OC-be, a két egyenes tehát merőleges egymásra.

Ismeretes, hogy a trapéz párhuzamos oldalaival párhuzamosan húzott E_1E_2 egyenes trapézba eső részét az átlók E metszéspontja felezi. Húzzunk E_1-ből párhuzamost CD-vel, ekkor az OF_1 és E_1E_2 közt paralelogramma keletkezik, melynek az E-ből húzott középvonala felezi az F_1E_2 paralelogrammába eső szakaszát és merőleges rá, mivel párhuzamos OC-vel; ez az egyenes felezi az F_1E_2 szakaszt is, mert annak a két végén egyenlő szakaszai esnek a paralelogrammán kívül is, így ez az E_1E_2 szakasz felező merőlegese, tehát $EE_2=EF_1$.

Ezzel beláttuk, hogy E annak a parabolának az AA_1B_1B négyzetbe eső ívén van, amelyiknek gyújtópontja F_1, irányvonala az OG egyenes. Ha E ennek az ívnek tetszés szerinti pontja, D az AA_1 és B_1E egyenesek metszéspontja, C pedig DO és BB_1 metszéspontja, akkor az előbbi meggondolás szerint az A_1B_1CD trapéz átlóinak metszéspontja a parabola íven van, és természetesen a B_1D egyenesen is, tehát az E pont lesz az. Ezt az ívet F-ből harmadára kicsinyítve az előbbi megoldásban leírt mértani helyhez jutunk.

Balogh Kálmán (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.) dolgozata, kiegészítésekkel.