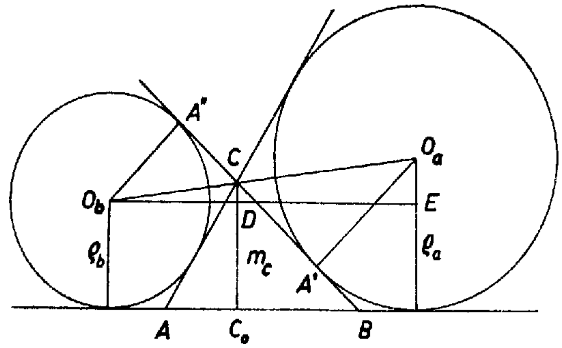
I. megoldás. Legyen az adott ϱ_a, ill. ϱ_b az $ABC\Delta$ BC, ill. CA oldalszakaszát és a másik 2–2 oldal meghosszabbítását érintő kör sugara, továbbá adott az AB oldalhoz tartozó m_c magasság. Legyen a két kör középpontja O_a, ill. O_b, és érintési pontjuk a BC oldalegyenesen A', ill. A''.



CO_a és CO_b felezi a háromszög C-nél levő egyik-egyik külső szögét, tehát egymás meghosszabbításába esnek. Így CO_aA' és CO_bA'' hasonló derékszögű háromszögek, ezért

(1)
$$\frac{CO_a}{CO_b} = \frac{O_aA'}{O_bA''} = \frac{\varrho_a}{\varrho_b}.$$

Messe az O_b-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes a C-ből és O_a-ból AB-re bocsátott merőlegest a D, ill. E pontban. $\varrho_a > \varrho_b$ esetén D a CC_0 magasságszakaszon van. Felhasználva az O_bCD és O_bO_aE háromszögek hasonlóságát és (1)-et

$$CD = \frac{CO_b}{O_aO_b} \cdot O_aE = \frac{CO_b}{O_aC + CO_b} \cdot O_aE = \frac{1}{\dfrac{CO_a}{CO_b} + 1} \cdot O_aE,$$

$$m_c - \varrho_b = \frac{1}{1 + \varrho_a/\varrho_b} \cdot (\varrho_a - \varrho_b), \text{ amiből}$$

(2)
$$m_c = \frac{2\varrho_a\varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b}.$$

Ha pedig $\varrho_a = \varrho_b$, akkor az O_aCO_b egyenes párhuzamos AB-vel, és ezért $m_c = \varrho_a = \varrho_b$, s így a (2) eredmény erre a speciális esetre is helyes.

Ezek szerint m_c egyik esetben sem független az adott sugaraktól, a háromszög az adatokból nem szerkeszthető meg egyértelműen. Ha az adathármas teljesíti (2)-t (ez annyi, mintha csak két adat lenne), így végtelen sok megfelelő háromszög szerkeszthető (az AB egyenes egyik partján úgy vesszük fel a két érintő kört, hogy ne legyen közös pontjuk, a háromszög további két oldalegyenesét a két kör közös belső érintői adják). Ha pedig (2) nem teljesül, egyetlen háromszög sem tesz eleget a követelményeknek.

Tóth Teréz (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az adott sugarak és a magasság ismert módon kifejezhetők a háromszög t területével, a, b, c oldalaival és $a + b + c = 2s$ kerületének felével:

$$\varrho_a = \frac{t}{s-a}, \qquad \varrho_b = \frac{t}{s-b}, \qquad m_c = \frac{2t}{c}.$$

Innen egyrészt

$$c = 2s - (a+b) = (s-a) + (s-b) = \frac{t}{\varrho_a} + \frac{t}{\varrho_b},$$

másrészt $c = \dfrac{2t}{m_c}$, és a két kifejezés egyenlőségéből

$$\frac{1}{m_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}\right)$$

(tekintet nélkül a két sugár nagyságviszonyára).

Ebből ugyanaz a következtetés adódik, mint az I. megoldásban.

Sebő Imre (Pannonhalma, Benedek-rendi g. II. o. t.)