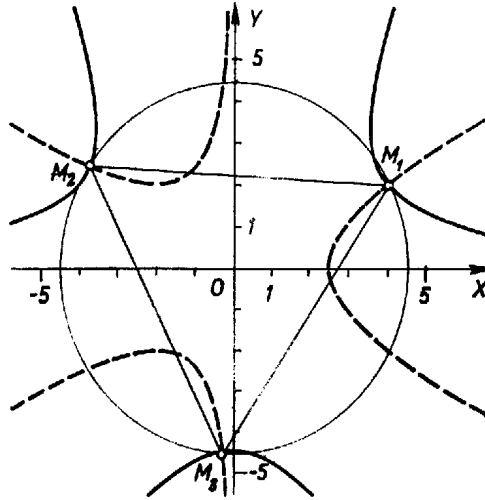


I. megoldás. a) (1)-ből y fejezhető ki könnyen, (2)-ből pedig x .

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{16}{3x}}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{y^2}{3} - \frac{88}{3y}},$$

ezek alapján az ábra 3-3 ágból álló görbéit kapjuk, (1) görbéje szaggatott vonallal van rajzolva. Az (1) görbe az X -tengelyre szimmetrikus, a (2) pedig az Y -ra. Nem kapunk y -t (1)-ből, ha $0 \leq x^3 < 16$, és x -et (2)-ből, ha $-88 < y^3 \leq 0$. (Az (1) görbének aszimptotája az Y -tengely, (2)-nek pedig az X -tengely.) Az értéktáblázatot 0,5 hosszúságú lépésekben készítve és a grafikon hosszegységét 1 cm-nek véve (ábránk ennek 1 : 2 arányú kicsinyítettje) a metszéspontok koordinátái, vagyis a gyökök kb. milliméter, azaz egy tizedes jegy pontossággal olvashatók le. Már az értéktáblázatból kiolvasható, hogy az $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ koordinátájú M_1 pont mindkét görbén rajta van, tehát ez az értékpár pontos megoldás. Az ábra két további metszéspontot mutat, ezekből két közelítő megoldást olvashatunk le:

$$x_2 \approx -3,7, \quad y_2 \approx 2,5; \quad \text{és} \quad x_3 \approx -0,3, \quad y_3 \approx -4,5.$$



b) Az egyenletrendszerből a konstans tagokat kiküszöbölve – vagyis (1)-et 11-gyel, (2)-t (-2) -vel szorozva és összeadva – homogén harmadfokú egyenlet adódik, abból pedig pl. x^3 -nel való osztás útján az $y/x = z$ hányadosra kapunk harmadfokú egyenletet:

$$11x^3 - 6x^2y - 33xy^2 + 2y^3 = 0, \quad 2z^3 - 33z^2 - 6z + 11 = 0.$$

Tudjuk, hogy ennek az egyenletnek egyik gyöke $z_1 = y_1/x_1 = 1/2$, ezért a bal oldalból kiemelhető a megfelelő $z - 1/2$, s így ennek 2-szerese is, a $2z - 1$ gyöktényező. Valóban

$$\begin{aligned} 2z^3 - 33z^2 - 6z + 11 &= z^2(2z - 1) - 32z^2 - 6z + 11 = \\ &= z^2(2z - 1) - 16z(2z - 1) - (22z - 11) = (2z - 1)(z^2 - 16z - 11), \end{aligned}$$

így a további két gyök a $z^2 - 16z - 11 = 0$ egyenletből $z_{2,3} = 8 \pm 5\sqrt{3}$.

Mármost $y = zx = (8 \pm 5\sqrt{3})x$ helyettesítéssel (1)-ből

$$\begin{aligned} x_{2,3}^3(1 - 3z^2) &= x_{2,3}^3(-416 \mp 240\sqrt{3}) = 16, \\ x_{2,3} &= \sqrt[3]{\frac{16}{-416 \mp 240\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-26 \mp 15\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{-26 \pm 15\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

és így

$$y_{2,3} = \sqrt[3]{(8 \pm 5\sqrt{3})^3(-26 \pm 15\sqrt{3})} = \sqrt[3]{-37 \mp 30\sqrt{3}}.$$

Megpróbáljuk előállítani $x_{2,3}$ -t $c \pm d\sqrt{3}$ alakban, ahol c és d egész szám. Ez sikerül, így ugyanis

$$x^3 = c(c^2 + 9d^2) \pm 3d(c^2 + d^2)\sqrt{3},$$

és a

$$c(c^2 + 9d^2) = -26, \quad 3d(c^2 + d^2) = 15$$

egyenletrendszernek megoldása $c = -2$, $d = 1$. Ennélfogva

$$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}, \text{ és ebből } y_{2,3} = z_{2,3} \cdot x_{2,3} = -1 \mp 2\sqrt{3},$$

két tizedes pontossággal

$$x_3 \approx -0,27, \quad y_3 \approx -4,46; \quad x_2 \approx -3,73, \quad y_2 \approx 2,46;$$

ami a grafikus megoldást igazolja.

II. megoldás a *b)* részre. Az ábráról úgy látszik, hogy M_1 , M_2 és M_3 egy origó középpontú körön vannak, a leolvasott közelítő értékekből is

$$x_1^2 + y_1^2 = 20, \quad x_2^2 + y_2^2 \approx 20,34, \quad x_3^2 + y_3^2 \approx 19,94,$$

közel egyenlők. Bebizonyítjuk, hogy ez a sejtés helyes.

(1) és (2) négyzetében csak páros kitevős hatványok lépnek fel, és a bal oldalak összegében felismerjük a négyzet-összeg köbét:

$$\begin{aligned} x^2(x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4) + y^2(9x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = \\ = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 = 8000 = 20^3. \end{aligned}$$

Eszerint ha egy x , y értékpár (1)-et is, (2)-t is kielégíti, akkor teljesül rá az egyszerűbb $x^2 + y^2 = 20$ egyenlet is.

Ennek alapján (1)-ből y -t kiküszöbölve és az adódó egyenlet 0-ra redukált alakjának bal oldalát az ismert $x_1 = 4$ -hez tartozó gyöktényezővel osztva

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = 0; \quad x^3 - 15x - 4 = x^2(x - 4) + 4x^2 - 15x - 4 = \\ = x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x^2 + 4x + 1), \end{aligned}$$

és az $x^2 + 4x + 1 = 0$ egyenletből $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$. Továbbá (2)-ből

$$y_{2,3} = \frac{88}{3x^2 - y^2} = \frac{22}{x^2 - 5} = \frac{22}{2 \mp 4\sqrt{3}} = \frac{11}{1 \mp 2\sqrt{3}} = -1 \mp 2\sqrt{3}.$$

Bárány Imre (Budapest – Mátyásföld, Corvin M. g. III. o. t.)

III. megoldás a *b)* részre. Az ábráról úgy látszik, hogy $M_1M_2M_3$ egyenlő oldalú háromszög, sőt hogy a két görbe 3–3 ága előáll egymásból 120° -os forgatásokkal az origó körül. Bebizonyítjuk az utóbbi sejtés helyességét avval, hogy ha $P(x, y)$ bármelyik görbe egy pontja, akkor a 120° -kal elforgatott $P'(x', y')$ pont is rajta van az illető görbén.

Legyen P -nek az origótól való távolsága r , és az X -tengely pozitív felét az OP félegyenesbe vivő forgás szöge φ ; ekkor $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,

$$\begin{aligned} (3) \quad x' &= r \cos(\varphi + 120^\circ) = -\frac{r}{2} \cos \varphi - \frac{r\sqrt{3}}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2}(-x - y\sqrt{3}), \\ y' &= r \sin(\varphi + 120^\circ) = \frac{1}{2}(-y + x\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ezeket írva (1) és (2) bal oldalán x , ill. y helyébe, a kifejezések az eredeti bal oldalakba mennek át:

$$\begin{aligned} x'(x'^2 - 3y'^2) &= \frac{-x - y\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-8x(x - y\sqrt{3})}{4} = x(x^2 - 3y^2), \\ y'(3x'^2 - y'^2) &= \frac{-y + x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8y(x\sqrt{3} + y)}{4} = y(3x^2 - y^2), \end{aligned}$$

és ez állításunkat bizonyítja.

Ezek szerint M_1 koordinátáiból (3) alapján kiszámíthatjuk M_2 -ét, majd ezekből M_3 -ét. Így is a fenti megoldásokat kapjuk.

Scsaurszky Péter (Pannonhalma, Benedek-rendi g. IV. o. t.)

Megjegyzés. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ helyettesítéssel és a trigonometrikus kifejezések felismerésével (1) és (2) így írható:

$$r^3 \cos 3\varphi = 16, \quad r^3 \sin 3\varphi = 88.$$

Eszerint a görbék polárkoordinátás egyenlete:

$$r = \sqrt[3]{\frac{16}{\cos 3\varphi}}, \quad \text{ill.} \quad r = \sqrt[3]{\frac{88}{\sin 3\varphi}}.$$

Ez is mutatja a forgási szimmetriát, hiszen φ -t 120° -kal növelve 3φ növekedése 360° , a nevezők és r értéke nem változik.

Innen is látható, hogy (1)-nek az O -n átmenő 60° -os és 300° -os forgásszögű egyenesek is szimmetriatengelyei, (2)-nek pedig a 30° -os és 150° -os egyenesek, továbbá az utóbbi két egyenes (1)-nek, az előbbi kettő (2)-nek aszimptotája. Az (1) görbét 30° -kal elforgatva, valamint 88 és 16 köbgyökének arányában nyújtva a (2)-t kapjuk.

Molnár Ágnes (Budapest – Cinkota, Kultúrház utcai g. IV. o. t.)