I. megoldás. Feltesszük, hogy az S súlypont és az M magasságpont különböző, mert különben a szimmetriatengely bármely S-en átmenő egyenes lehet, minden S középpontú szabályos ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, tehát a mértani hely az egész sík, S kivételével.

Miután S és M a szimmetriatengelyen van, SM maga a szimmetriatengely, ezen mozog a C csúcs, az alap erre merőleges és félakkora távolságra van S-től, mint C. Válasszuk a derékszögű koordinátarendszer origójának S-et, Y tengelyének az SM egyenest, M ordinátáját 1-nek, és legyenek ezeknek megfelelően A és B koordinátái $(x,\, y)$, és $(-x,\, y)$. Ekkor C koordinátái $(0,\, -2y)$.

A CA szár és a BM magasság merőlegesek, ez akkor és csak akkor teljesül, ha iránytangenseik szorzata -1, tehát ha $x \neq 0$, és

$$\frac{y-(-2y)}{x} \cdot \frac{1-y}{x} = \frac{3y(1-y)}{x^2} = -1.$$

Mivel x nem 0, átszorozhatunk a négyzetével és rendezhetjük az egyenletet. A mértani hely tehát azokból a pontokból áll, amelyeknek koordinátáira

(1) $$3y^2 - 3y - x^2 = 0, \qquad x \neq 0.$$

Egyenletünk így is írható:

$$3\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{3}{4}, \qquad -\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

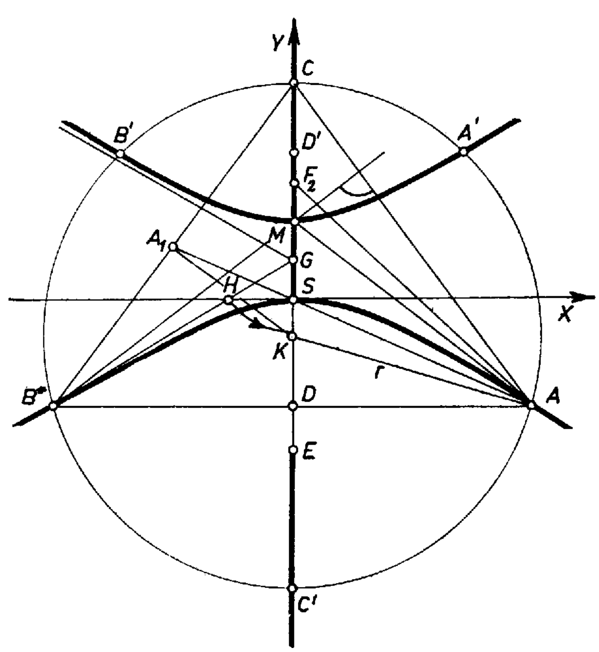
Eszerint A és B mértani helye az a hiperbola, az Y tengelyen levő pontjai kivételével, amelyiknek középpontja a $(0,\, 1/2)$ pont – vagyis az SM szakasz felezőpontja –, főtengelye az Y tengely – más szóval az SM egyenes –, fő-, ill. melléktengelye felének hossza $(a =)\ 1/2$, ill. $(b =)\ \sqrt{3}/2$, ezért csúcsai S és M (ezek nem tartoznak a mértani helyhez), fókuszainak távolsága a középponttól 1(ti. $a^2 + b^2$ négyzetgyöke), másrészt aszimptotái a főtengellyel $60°$-os szöget zárnak be.

Meg kell azonban jegyezni, hogy az SM egyenesen végigfutó C pontnak nem minden helyzetéhez tartozik háromszög. (1)-ből $x^2 = 3y(y-1)$ negatív, ha $0 < y < 1$, másrészt a fent kizárt $x = 0$ esetben (és csak ekkor) $y = 0{,}1$. Eszerint C ordinátájára vagy $-2y > 0$, vagy $-2y < -2$, tehát míg C az ábra SE szakaszán halad végig, nem jön létre háromszög.

Majtényi Gábor (Pannonhalma, Benedek-rendi g. IV. o. t.)

II. megoldás. A mértani helyet megállapíthatjuk koordináta geometria felhasználása nélkül is, ha már elég sok pont megszerkesztése után kialakult, hogy milyen görbét várhatunk megoldásul.

Jegyezzük meg először is, hogy az S súlyponttal és M magasságponttal együtt a háromszög köré írt kör K középpontja is közös a szóban forgó egyenlő szárú háromszögekben. K-t ugyanis megkaphatjuk pl. mint a BC oldalra A_1 felezőpontjában emelt merőlegesnek az SM egyenessel való metszéspontját. Ekkor azonban az ASM és A_1SK hasonló háromszögekből $SK/SM = SA_1/SA = 1/2$, $SK = SM/2$, és S a K és M pontok közt van, miután A-t és A_1-et is elválasztja[1]. Eszerint C egy bizonyos helyzetéhez tartozó A, B pontpár csak a K körül KC sugárral írt körön kereshető. Másrészt AB-nek D felezőpontja CS-nek S-en túli meghosszabbításán $CD = 3CS/2$ távolságra van, A és B pedig a D-ben SM-re állított merőlegesen. Ezek szerint A és B a merőlegesnek a fenti körrel való metszéspontjai.



[1]Minden háromszögre igaz, hogy M, S és K egy egyenesen van, a háromszög ún. *Euler*-egyenesén és $SK = SM/2$. Lásd pl. *Gallai T.–Hódi E.–Szabó P.–Tolnai J.:* Matematika az ált. gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962, 163. o.

Egy K közepű kör kétszer metszi SM-t, ezért egy ilyen kört – ha $KC > KM$ – egy csapásra két A, B pontpár szerkesztésében használhatunk fel. ($KS < KC < KM$ esetén csak egyik C helyzethez kapunk így A, B-t, $KC < KS$ esetén pedig egyikhez sem. $KC = KS$ esetén szakasszá elfajult háromszög adódik, ugyanígy $KC = KM$ esetén az egyik C helyzethez. Ismét adódik, hogy az SK négyszeresére nyújtásával kapott SE szakaszon levő C-k nem adnak háromszöget.) A pontpárokat szaporítva hiperbola látszik kialakulni, melynek csúcsai S és M. Ha sejtésünk helyes, az SM szakasz G középpontját az ábra „távoli” B^* pontjával összekötő egyenes közel áll az egyik aszimptotához, azért az S-ben SM-re állított merőlegessel (a csúcsérintővel) való H metszéspontját G körül SM-re forgatva az egyik fókuszhoz közeli pontot kell kapnunk.[2] A forgatás K-hoz közel eső pontot ad, ezért megpróbáljuk bebizonyítani, hogy a mértani hely az a hiperbola, melynek csúcsai M és S, és egyik fókusza K (így a másik fókusz K-nak G-re vonatkozó F_2 tükörképe).

Legyen C az SM-nek M-en túli meghosszabbításán – így D az SK-nak K-n túli meghosszabbításán van –, és legyen $KC = KA = r$, továbbá $SM = 2a$, így $F_2M = SK = a$.

$$F_2A^2 = F_2D^2 + DA^2 = F_2D^2 + KA^2 - KD^2 = KA^2 + (F_2D + KD)F_2K,$$

ehhez $F_2D = F_2S + SD, \qquad KD = SD - SK$, ezért

$$F_2D + KD = 2a + 2SD = 2a + CS = 2a + (r - a) = r + a;$$
$$F_2A^2 = r^2 + (r + a)4a = (r + 2a)^2,$$
$$F_2A = r + 2a, \quad \text{vagyis} \quad F_2A - KA = 2a = SM,$$

amit bizonyítani akartunk.

Csekély közbülső eltérések után ugyanerre az eredményre jutunk, ha C az SM szakaszon van, ha pedig SE-nek E-n túli meghosszabbításán van C, akkor $KA - F_2A = 2a$.

Hasonlóan meg lehet mutatni, hogy ha $F_2K = 4a$, és $F_2A - KA = 2a$, vagy $KA - F_2A = 2a$, de A nincs F_2K-n, továbbá a C pontot úgy jelöljük ki a KF_2 egyenesen, hogy A-nak D vetületétől 3-szor annyira legyen, mint S (a KF_2 szakasz első negyedelő pontja), és ugyanazon az oldalon, B pedig A tükörképe D-re, akkor $KC = KA$, tehát K az ABC egyenlő szárú háromszög köré írt kör középpontja, S a súlypontja, és így M a magasságpontja; tehát A hozzátartozik a mértani helyhez.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

[2] Ugyanis a hiperbola középpontja körüli, a fókuszokon átmenő kör átmegy a csúcsérintők és aszimptoták metszéspontjain is.