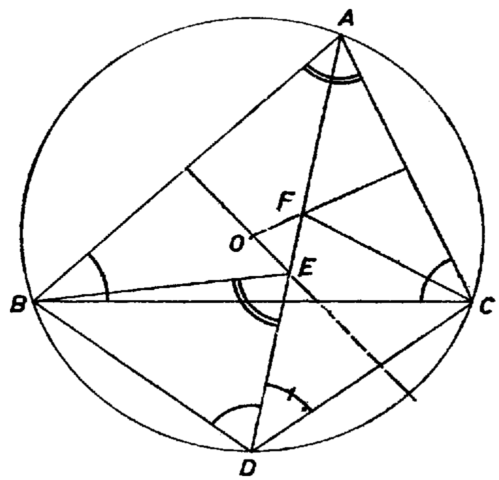
I. megoldás. A BDE és DCF háromszögek hasonlók az ABC háromszöghöz, mert két-két szögük egyenlő: $BDE\sphericalangle = BDA\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, mint a C-t nem tartalmazó AB íven nyugvó kerületi szögek, továbbá az ABE egyenlő szárú háromszög külső szögeként $BED\sphericalangle = BAE\sphericalangle + ABE\sphericalangle = 2BAE\sphericalangle = BAC\sphericalangle$; továbbá innen a B, C és E, F betű-párok felcserélésével $CDF\sphericalangle = CBA\sphericalangle$, és $CFD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$. Ezért – mégegyszer felhasználva az ABE és ACF háromszögek egyenlő szárú voltát –

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{AC}{AB}, \qquad \frac{AF}{DF} = \frac{CF}{DF} = \frac{AC}{AB},$$

ezek összeszorzása pedig (1)-et adja.



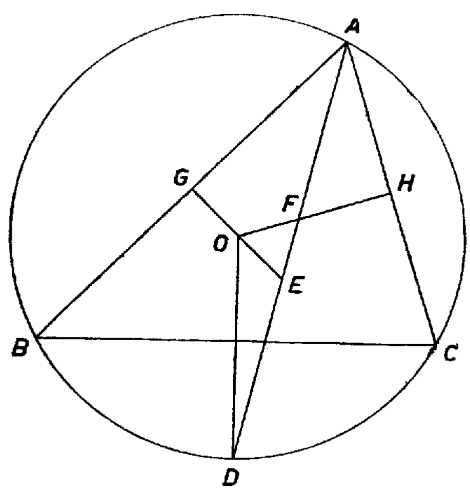
1. ábra

Felhasználtuk, hogy D és C ugyanazon oldalán vannak az AB húrnak; ez mindig teljesül, mert AC-be 2-szer akkora forgással jutunk át AB-ből, mint AD-be, és az előbbi forgás kisebb $180°$-nál. Továbbá azt is, hogy E az AD szakaszon van; ez sem lehet másképpen, mert ha E az AD meghosszabbítására esnék, akkor D a felező merőlegesnek A-t tartalmazó oldalán lenne, és a C-t nem tartalmazó BC ív fele nagyobb lenne a C-t tartalmazó BA ív felénél, ami lehetetlen.

Medveczky Mihály (Szombathely, Latinka S. gépip. t. II. o.t.)

Megjegyzés. Bizonyításunk $AB = AC$ esetén is érvényes, az állítás azonban semmitmondó, (1) mindkét oldalán 1 áll.

II. megoldás. Legyen AB, AC felezőpontja G, ill. H, és a körülírt kör középpontja O. Elég az $AB > AC$ esettel foglalkoznunk (2. ábra).



2. ábra

Az AEG és AFH derékszögű háromszögek hasonlók, mert bennük A-nál egyenlő szögek vannak. Ezért

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AH}{AG} = \frac{2AH}{2AG} = \frac{AC}{AB}. \tag{2}$$

A jobb oldal kisebb 1-nél, így $AF < AE$, F az AE szakaszon van, a pontok sorrendje a szögfelezőn A, F, E, D.

Az OAF és DOE háromszögek[1] egybevágók, mert $OA = OD$ a sugár, az OAD egyenlő szárú háromszögből $OAF\sphericalangle = ODE\sphericalangle$, továbbá a külső szög tétele alapján

$$OED\sphericalangle = EGA\sphericalangle + EAG\sphericalangle = FHA\sphericalangle + EAC\sphericalangle = OFA\sphericalangle.$$

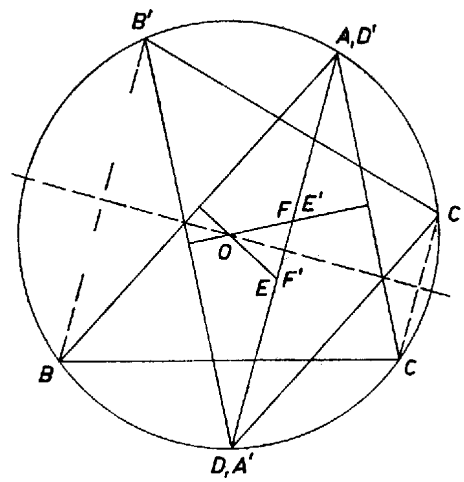
Így $AF = DE$, és mindkét oldalhoz EF-et adva $AE = DF$. Innen

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AF}{AE},$$

eszerint (1) tulajdonképpen a már bebizonyított (2) egyenlőség négyzete. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Varga Ágnes (Budapest, Veres Pálné g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az $AE = DF$ és $AF = DE$ egyenlőségeket az ábrának AD felező merőlegesére való tükrözésével is megmutathatjuk. Így A, D felcserélődnek, azt kell tehát belátnunk, hogy E és F egymás képei (3. ábra).

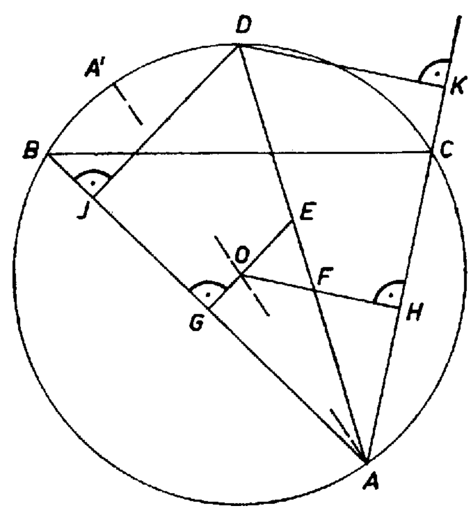


3. ábra

Legyen B, E képe B', ill. E'. A szögfelezés miatt $ADB'\sphericalangle = DAB\sphericalangle = DAC\sphericalangle$, ezért $B'D \| AC$. Ámde párhuzamos húrok felező merőlégese közös: a rájuk merőleges átmérő, ezért E' egybeesik F-fel.

Erdődy Gabriella (Budapest, XI., Villányi úti ált. isk. 8. o. t.)

III. megoldás. Legyen D vetülete az AB, AC egyenesen J, ill. K, és legyen $AB > AC$. Ekkor J az AB szakaszon van, K pedig AC-nek C-n túli meghosszabbításán, mert a kör A-val átellenes A' pontjának az oldalakon levő vetülete esik B-be, ill. C-be, márpedig D nyilvánvalóan az $A'C$ ív belsejében van (4. ábra).



4. ábra

$BJ = CK$, mert a DBJ és DCK derékszögű háromszögek egybevágók, ugyanis egyenlők az átfogóik, mert a BCD háromszög egyenlő szárú, hiszen B-nél és C-nél levő szöge fele a BAC szögnek, továbbá $DJ = DK$, mert D a BAC

[1] Az ábrán OA meghúzandó.

szög száraitól egyenlő távolságra van. – Mivel még $AJ=AK$, azért

$$BJ=CK=\frac{AB-AC}{2}, \quad \text{és így}$$

$$GJ=GB-BJ=\frac{AC}{2}, \quad \text{és} \quad HK=HC+CK=\frac{AB}{2}$$

(ahol G, H ismét az oldalfelező pontok).

Most már a BAD, ill. CAD szög szárain az EG és DJ, illetőleg FH és DK párhuzamosokkal kimetszett szakaszokra

$$\frac{DE}{AE}=\frac{JG}{AG}=\frac{AC/2}{AB/2}=\frac{AC}{AB}, \quad \text{ill.} \quad \frac{AF}{DF}=\frac{AH}{KH}=\frac{AC}{AB},$$

és ezeket összeszorozva az állítást kapjuk.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)