I. megoldás. A feladat szövege szerint elég egy ilyen függvényt megadni. Keressük ezt az elsőfokú polinomok közt, azaz

$$\mathrm{f}(x) = dx + e$$

alakban. Az előírt

$$\begin{gathered} ad(x-1) + ae + bd(1-x) + be = \\ = d(a-b)x - d(a-b) + e(a+b) = cx \end{gathered}$$

azonosság fennáll, ha a két oldalon x együtthatója és az állandó rész egyenlő, azaz

$$\begin{gathered} d(a-b) = c, \text{ és} \\ -d(a-b) + e(a+b) = -c + e(a+b) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Eszerint

$$\begin{gathered} d = \frac{c}{a-b}, \qquad e = \frac{c}{a+b}, \qquad \text{és így} \\ \mathrm{f}(x) = \frac{c}{a-b} \cdot x + \frac{c}{a-b}, \end{gathered} \tag{3}$$

megfelel, ha $a-b$ és $a+b$ egyike sem 0.

Ha $a = b$ vagy $a = -b$, akkor (1) így alakul:

$$a[\mathrm{f}(x-1) \pm \mathrm{f}(1-x)] = cx;$$

ide $x = 0$-t és $x = 2$-t helyettesítve

$$a[\mathrm{f}(-1) \pm \mathrm{f}(1)] = 0, \qquad a[\mathrm{f}(1) \pm \mathrm{f}(-1)] = 2c.$$

Mivel a két esetben a zárójelben vagy ugyanaz áll, vagy csak előjelben különböző mennyiség, így kell, hogy $c = 0$ legyen. Ha még a is 0, azaz $a = b = c = 0$, akkor minden mindenütt értelmezett függvény kielégíti (1)-et, semmitmondó esetre jutunk.

Ha $a = b \neq 0,\ c = 0$, és ismét elsőfokú függvényt keresünk, akkor

$$a \cdot 2e = 0, \qquad e = 0, \qquad \mathrm{f}(x) = dx \text{ adódik;}$$

ha pedig $a = -b \neq 0$, $c = 0$ akkor

$$a \cdot 2d = 0, \qquad d = 0, \qquad \mathrm{f}(x) = e \qquad \text{adódik.}$$

Ezzel minden olyan esetben, amikor az (1) egyenlet megoldható, megadtuk egy megoldását (az utolsó esetekben többet is).

Megjegyzés. Ha pl. pontosan másodfokú polinom megoldást keresünk, hasonlóan látható, hogy ilyent csak $a + b = 0 = c$ esetben találunk, és ilyenkor minden $kx^2 + n$ alakú polinom ($k \neq 0$) megfelel. – Az alábbi megoldás megadja az összes (1)-nek eleget tevő függvényt.

II. megoldás. Írjunk (1)-ben x helyére előbb $1 + x$-et, majd $1 - x$-et, így

$$a \cdot \mathrm{f}(x) + b \cdot \mathrm{f}(-x) = c + cx, \tag{4'}$$
$$a \cdot \mathrm{f}(-x) + b \cdot \mathrm{f}(x) = c - cx, \tag{4''}$$

majd vonjuk ki az első egyenlet a-szorosából a második egyenlet b-szeresét:

$$(a^2 - b^2) \cdot \mathrm{f}(x) = (a-b)c + (a+b)cx. \tag{5}$$

Innen $a^2 - b^2 \neq 0$ esetén az egyetlen megfelelő függvény

$$\mathrm{f}(x) = \frac{c}{a+b} + \frac{cx}{a-b}.$$

Valóban, ekkor

$$a\left(\frac{c}{a+b} + \frac{c(x-1)}{a-b}\right) + b\left(\frac{c}{a+b} + \frac{c(1-x)}{a-b}\right) = c + c(x-1) = cx.$$

A kizárt esetekben (5) bal oldala azonosan 0, jobb oldala pedig akkor, ha

$$(a-b)c = 0, \qquad \text{és} \qquad (a \neq b)c = 0. \tag{6}$$

Ha $a-b=0$, és $a+b\neq 0$, azaz $a=b\neq 0$, akkor (6) csak $c=0$ esetén teljesül. Ekkor már ($4'$) és ($4''$) is azonosak, a-val osztva

$$\mathrm{f}(x)=-\mathrm{f}(-x),$$

vagyis megfelel minden páratlan függvény [1], pl. x; x^3; $4\,x^5-7{,}2x^3+4{,}9x$; $\sin x$ (az utóbbi példa esetében x, $x-1$ és $1-x$ ívmértékben, radiánban mért forgásszögek). Viszont $a=b\neq 0\neq c$ esetén nincs az (1)-nek eleget tevő függvény.

Hasonlóan $a+b=0$, $a-b\neq 0$ esetén (6) miatt csak $c=0$ esetén van megoldás, ekkor $b=-a\neq 0$, és ($4'$)-ből

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(-x),$$

vagyis megfelel minden páros függvény pl. 1; x^2; x^6-6x^2+4; $\cos x$. (Viszont $c\neq 0$ esetén nincs megoldás.)

Végül ha $a-b=a+b=0$, vagyis $a=b=0$, akkor már (1)-ből látható, hogy $c=0$ kell legyen, és ekkor bármely mindenütt értelmezett $\mathrm{f}(x)$ függvény megfelel.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

III. megoldás. Ha az $\mathrm{f}(x)$ függvény mindenütt értelmezve van, akkor a

$$\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)}{2}\quad\text{és}\quad \mathrm{h}(x)=\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2}$$

képletekkel értelmezett függvényekre $\mathrm{g}(x)=\mathrm{g}(-x)$, és $\mathrm{h}(x)=-\mathrm{h}(-x)$, azaz $\mathrm{g}(x)$ páros függvény, $\mathrm{h}(x)$ páratlan függvény, továbbá

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x).$$

Ezt (1)-be beírva

$$\begin{aligned}
&a\cdot[\mathrm{g}(x-1)+\mathrm{h}(x-1)]+b\cdot[\mathrm{g}(1-x)+\mathrm{h}(1-x)]=\\
&=a\cdot[\mathrm{g}(x-1)+\mathrm{h}(x-1)]+b\cdot[\mathrm{g}(x-1)+\mathrm{h}(x-1)]=\\
\text{(A)}\qquad &=(a+b)\cdot\mathrm{g}(x-1)+(a-b)\cdot\mathrm{h}(x-1)=cx.
\end{aligned}$$

x helyébe $2-x$-et írva

$$\begin{aligned}
&(a+b)\cdot\mathrm{g}(1-x)+(a-b)\cdot\mathrm{h}(1-x)=\\
\text{(B)}\qquad &=(a+b)\cdot\mathrm{g}(x-1)-(a-b)\cdot\mathrm{h}(x-1)=2c-cx.
\end{aligned}$$

(B)-t (A)-hoz adva, ill. abból levonva és 2-vel osztva

$$(a+b)\cdot\mathrm{g}(x-1)=c,\qquad (a-b)\cdot\mathrm{h}(x-1)=c(x-1).$$

vagy x helyébe $x+1$-et írva

$$\text{(C)}\qquad (a+b)\cdot\mathrm{g}(x)=c,\qquad \text{(D)}\qquad (a-b)\cdot\mathrm{h}(x)=cx.$$

Mármost ha α) $a+b\neq 0$, akkor (C) miatt

$$\mathrm{g}(x)=\frac{c}{a+b};$$

β) ha $a+b=0$, akkor (1)-nek csak abban az esetben van megoldása, ha $c=0$; ekkor viszont $\mathrm{g}(x)$ tetszőleges;

γ) $a-b=0$ esetén (D) miatt

$$\mathrm{h}(x)=\frac{c}{a-b}x;$$

δ) ha $ab=0$, akkor (D) miatt (1)-nek csak abban az esetben van megoldása, ha $c=0$; ekkor viszont $\mathrm{h}(x)$ tetszőleges.

Összefoglalva a lehetséges eseteket: $\alpha\gamma$) $a^2\neq b^2$ esetén

$$\mathrm{f}(x)=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b};$$

$\alpha\delta$) $a=b\neq 0$ esetén, ha még $c\neq 0$, akkor nincs megoldás; ha pedig $c=0$, akkor tetszőleges páratlan függvény megoldás;

$\beta\gamma$) $a=-b\neq 0$ esetén, ha még $c\neq 0$, akkor nincs megoldás, ha pedig $c=0$, akkor tetszőleges páros függvény megoldás;

$\beta\delta$) $a=b=0$ esetén, ha még $c\neq 0$, akkor nincs megoldás, ha pedig $c=0$, akkor tetszőleges függvény megoldása az adott egyenletnek.

Bárány Imre (Budapest – Mátyásföld, Corvin M. g. III. o. t.)

---

[1]Ismeretes, hogy az $\mathrm{f}(-x)$ függvény képe megkapható $\mathrm{f}(x)$ képéből az Y-tengelyre való tükrözéssel, – lásd pl. *Szász G.–Hódi E.–Tolnai J.:* Matematika a gimn. IV. o. számára, 11. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1962. 45. o. Hasonlóan a $-\mathrm{f}-(x)$ függvény képe megkapható $\mathrm{f}(-x)$ képéből az X-tengelyen való tükrözéssel, vagyis $\mathrm{f}(x)$ képéből az origóra való tükrözéssel, más szóval az origó körüli 180°-os forgatással.

Ha $\mathrm{f}(-x)$ képe egybeesik $\mathrm{f}(x)$ képével – mint pl. minden olyan polinom esetében, amely x-nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza –, akkor $\mathrm{f}(x)$-et *páros függvény*nek nevezzük. Ha $-\mathrm{f}(-x)$ képe egybeesik $\mathrm{f}(x)$ képével – mint pl. minden olyan polinom esetében, amely x-nek csak páratlan kitevőjű hatványait tartalmazza –, akkor $\mathrm{f}(x)$-et *páratlan függvény*nek nevezzük.