Tekintsük először a (6) összefüggést, amelyben csak két szomszédos tagja szerepel a sorozatnak. Itt k legkisebb lehetséges értéke 2, ekkor az állítás igaz, a definició első része szerint. Tegyük fel, hogy igaz (6) az index valamilyen n értékére, ebből a definíció második része alapján megmutatjuk, hogy igaz az 1-gyel nagyobb indexre is, tehát minden $k \geq 2$ egész számra igaz. A feltevés szerint

$$2a_{n-1} = a_n - (-1)^{n-1} = a_n + (-1)^n,$$

ezért (1) szerint

$$a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n = 2a_n + (-1)^n, \tag{9}$$

ami állításunkat igazolja.

Hasonlóan (7) igaz $k = 1$ esetén. És ha igaz valamilyen n indexre, akkor igaz $n+1$-re is, mert (1) felhasználásával

$$a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+1} + (2a_n + a_{n+1}) = 2(a_n + a_{n+1}) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

tehát (7) igaz minden pozitív egész k-ra.

(7) és (9) felhasználásával már megadhatjuk a_n keresett kifejezését. Adjunk (9) mindkét oldalához a_n-t és alkalmazzuk a bal oldalra (7)-et:

$$a_n + a_{n+1} = 2^n = 3a_n + (-1)^n, \qquad \text{amiből}$$

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{10}$$

Fejezzük ki (8) bal oldalát (10) alapján (feltéve természetesen, hogy $k-4 \geq 1$, azaz $k \geq 5$):

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-4} &= \frac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k - 2^{k-4} + (-1)^{k-4}\right] = \frac{2^{k-4}}{3}(2^4 - 1) = 5 \cdot 2^{k-4} = \\ &= 10 \cdot 2^{k-5}, \end{aligned}$$

ugyanis k és $k-4$ egyenlő párosságú számok, (-1)-et ezekre a kitevőkre emelve a hatvány egyenlő. Eszerint (8) igaz 5-től minden k egész számra.

Minthogy 2^{k-5} egész szám (és a sorozat tagjai is egész számok), azért (8) azt fejezi ki, hogy a sorozat minden tagja (a_5-től kezdve) ugyanolyan jegyre végződik, mint a 4-gyel kisebb indexű tag. Eszerint a_{4j+1} utolsó számjegye megegyezik $a_{4(j-1)+1}$, $a_{4(j-2)+1}$, …, a_1 utolsó jegyével, ami 1. Hasonlóan a $4j+2$, $4j+3$, $4j$ sorszámú tagok utolsó jegye rendre egyenlő a_2, a_3, a_4 utolsó jegyével. $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$; így a jegyvégződésekre vonatkozó állítás helyes.

(2) bal oldalán az egymás utáni tagpárokat (7) alapján kifejezve $k-1$ tagú mértani sorozatot kapunk, és még az összeg utolsó tagját:

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2k-3} + a_{2k-2}) + a_{2k+1} = \\ &= 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2k-3} + a_{2k-1}. \end{aligned}$$

Innen a mértani sorozat összeg-képlete, majd (10), végül (1) alkalmazásával tovább haladva az összefüggés igaznak bizonyul:

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= 2 \cdot \frac{(2^2)^{k-1} - 1}{2^2 - 1} + a_{2k-1} = 2 \cdot \frac{2^{2k-2} - (-1)^{2k-2}}{3} + \\ &+ a_{2k-1} = 2a_{2k-2} + a_{2k-1} = a_{2k}. \end{aligned}$$

Hasonlóan (3) esetében, k tagú sorozattal:

$$\begin{aligned} S_{2k} &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \\ &= 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2k-1} = 2 \cdot \frac{(2^2)^k - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^{2k+1} - 2}{3} = \\ &= \frac{2^{2k+1} - (-1)^{2k+1}}{3} - 1 = a_{2k+1} - 1, \end{aligned}$$

tehát (3) is helyes.

Mivel k és $k-4$ egyenlő párosságú, (2) és (3) felhasználásával páros és páratlan k-ra egyaránt

$$S_k - S_{k-4} = a_{k+1} - a_{k-3},$$

a jobb oldal pedig (8) alapján $10 \cdot 2^{k-4}$; a (4) összefüggés is helyes.

Végül (5) így írható:

$$S_k = \frac{2}{3}\,(2k-1), \tag{5´}$$

ez nem lehet érvényes minden k-ra, hiszen páratlan k esetén $2^k - 1$ nem osztható 3-mal, és így S_k nem volna egész szám:

$$2^{2k+1} - 1 = 2\cdot 4^k - 1 = 4^k + (4^k - 1^k),$$

ahol a második tag osztható $4-1=3$-mal, de az első nem. Páros k-ra azonban érvényes az állítás, mert (3) és (10) felhasználásával

$$S_{2k} = a_{2k+1} - 1 = \frac{2^{2k+1}+1}{3} - 1 = \frac{2^{2k+1}-2}{3},$$

és ez egyenlő $(5')$ jobb oldalával, ha k helyére mindkét oldalon $2k$-t írunk.

Rosta Vera (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)
Szentgáli Ádám (Budapest, Ady E. 12 évf. isk. II. o. t.)
Bíró Ákos (Budapest, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat utolsó előírásának megfelel az (1)-ből adódó

$$a_n = \frac{1}{2}\,(a_{n+2} - a_{n+1})$$

kifejezés is. Ennek felhasználásával S_k-ra is adhatunk a (10)-höz hasonló, minden indexre érvényes és csak az indexet tartalmazó kifejezést.

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \\ &= \frac{a_3-a_2}{2} + \frac{a_4-a_3}{2} + \ldots + \frac{a_{k+1}-a_k}{2} + \frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{2} = \\ &= \frac{a_{k+2}-a_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{k+2}-(-1)^{k+2}}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(2^{k+1} - \frac{(-1)^k+3}{2}\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(2^k - \frac{3+(-1)^k}{4}\right). \end{aligned}$$

Páros k esetén (5) azonos ezzel, páratlan k esetén viszont nem, ekkor az összeg

$$S_k = \frac{2}{3}\left(2^k - \frac{1}{2}\right),$$

ekkor (5) nem érvényes.