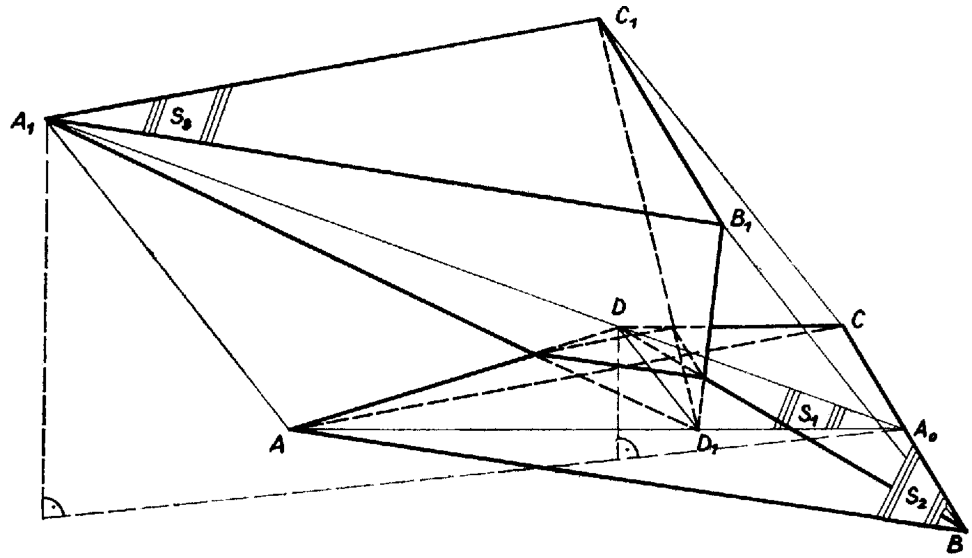
I. Be fogjuk látni, hogy az $A_1B_1C_1D_1 = T_1$ tetraéder $A_1B_1C_1 = H_1$ lapja egybevágó, tehát egyenlő területű az $ABCD = T$ tetraéder $ABC = H$ lapjával, továbbá hogy T_1-nek D_1-ből húzott magassága 3-szor akkora, mint T-nek D-ből húzott magassága. Ezekből az állítás már adódik.

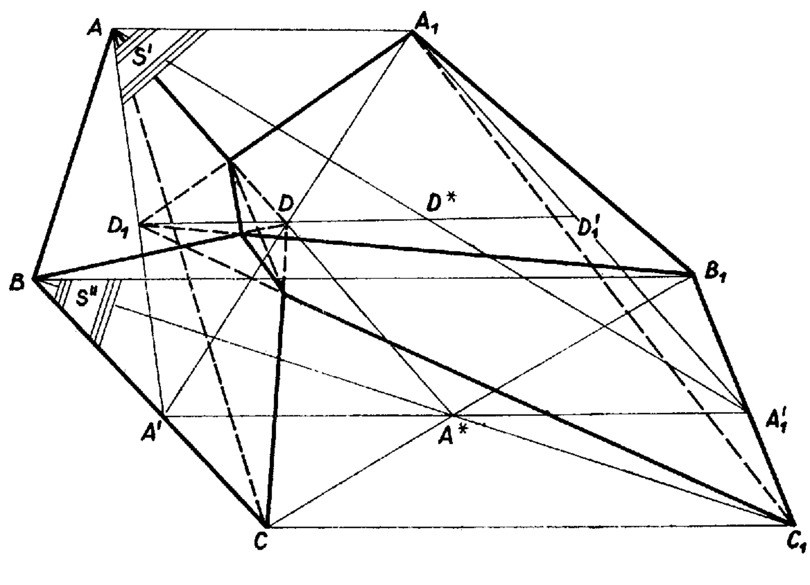


Az AA_1 és DD_1 párhuzamos egyenesekkel meghatározott S_1 sík a BC élt annak A_0 felezőpontjában metszi, mert itt metszi BC-t S_1-nek az $ABC = S_2$ síkkal való metszésvonala, az AD_1 súlyvonal. Így S_1 és a BCD lapsík A_1D metszésvonala is átmegy A_0-on. Ezért az A_0AA_1 és A_0D_1D háromszögek hasonlók, és a súlypont harmadoló tulajdonsága alapján

$$AA_1 = \frac{AA_0}{D_1A_0} \cdot D_1D = 3D_1D,$$

ennélfogva S_2-től D harmadrész akkora távolságra van, mint A_1.

Hasonlóan $BB_1 = CC_1 = 3\,D_1D(= AA_1)$. Párhuzamosak is, emiatt az ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1 négyszögek paralelogrammák. Ezért a H_1 és H háromszögek megfelelő oldalai páronként egyenlők, maguk H_1 és H egybevágók, mint állítottuk. Továbbá páronként párhuzamosak is a megfelelő oldalak, így H_1-nek S_3 síkja párhuzamos S_2-vel. Így pedig T_1-nek D_1-ből húzott magassága egyenlő A_1-nek S_2-től való távolságával, tehát valóban 3-szor akkora, mint T-ben a D-ből húzott magasság.



II. Legyen D_1 az ABC háromszög tetszés szerinti belső pontja, és D_1' a D_1D egyenes és az $A_1B_1C_1$ sík metszéspontja. Vágjuk három részre a T és T_1 tetraédert az $AA_1D_1'D_1$, $BB_1D_1'D_1$, $CC_1D_1'D_1$ síkokkal és vizsgáljuk a megfelelő résztetraéderek térfogatának arányát. (Idomok térfogatát, ill. területét ugyanúgy jelöljük, mint magukat az idomokat.) Ekkor pl. az ABD_1D és $A_1B_1D_1'D_1$ tetraéderek AD_1D és $A_1D_1'D_1$ lapjának síkja közös. A B-ből, ill. B_1-ből erre bocsátott magasság egyenlő, mert BB_1 párhuzamos ezzel a síkkal, így

$$\frac{A_1B_1D_1'D_1}{ABD_1D} = \frac{A_1D_1'D_1}{AD_1D}.$$

A két háromszög D_1D és D_1D_1' oldala egy egyenesen van, és az A-ból, ill. A_1-ből erre bocsátott magasság egyenlő, mert $AA_1 \| D_1D$, így

$$\frac{A_1B_1D_1'D_1}{ABD_1D} = \frac{D_1'D_1}{D_1D}.$$

Hasonlóan

$$\frac{B_1C_1D_1'D_1}{BCD_1D} = \frac{C_1A_1D_1'D_1}{CAD_1D} = \frac{D_1'D_1}{D_1D},$$

tehát

$$T_1/T = D_1'D_1/D_1D. \tag{1}$$

Ezzel visszavezettük a feladatot az utóbbi arány meghatározására.

Messe az $AA_1DD_1 = S'$ sík BC-t A'-ben, B_1C_1-et A_1'-ben. Így $A'A_1' \| AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, mert BB_1 és CC_1 párhuzamosak, meghatároznak egy S'' síkot, ez párhuzamos AA_1-gyel, $A'A_1'$ pedig S'' és S' metszésvonala, tehát párhuzamos AA_1-gyel.

Legyen AD és $A'A_1'$ metszéspontja A^*. Ez egyszersmind a BCC_1B_1 trapéz átlóinak metszéspontja, mert a BC_1 átló S'' metszésvonala az ADB, másképpen ADC_1 oldallapsíkkal, CB_1 pedig ugyanígy az $ADC = ADB_1$ sík metszésvonala S''-vel. így $A'A^* = A^*A_1'$.

Legyen végül DD_1 metszéspontja AA_1'-ve1 D^*. Ekkor $DD^* = D_1D = D^*D_1 = D_1D_1'/3$, mert egyrészt AA^* az $AA'A_1'$ háromszög súlyvonala, és így felezi az $A'A_1'$ oldallal párhuzamos D_1D^* szakaszt, másrészt az AA_1A' és AA_1A_1' háromszögek AA_1 alapja közös, a harmadik csúcsaikat összekötő egyenes párhuzamos vele, ezért

$$D_1D = D^*D_1' = \frac{A'D_1}{A'A} : AA_1$$

(ugyanis $A'A_1$ az ADC és S' síkok metszésvonala, tehát átmegy D-n, hasonlóan AA' átmegy D_1-en).

Eszerint az (1) arány értéke 3, az I. részben az ABC háromszög súlypontjából kiindulva szerkesztett alakzatra kapott eredmény érvényes az ABC háromszög belsejében tetszés szerint felvett D_1 pontból kiindulva szerkesztett alakzatra is.