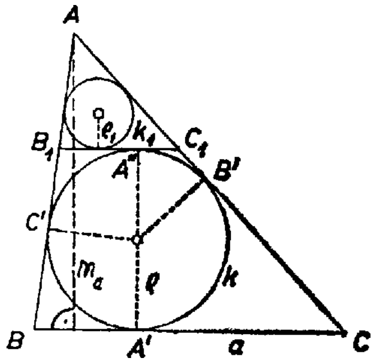
I. megoldás. Ismeretes, hogy a háromszögbe írt k kör ϱ sugara egyenlő a t/s hányadossal, ahol t a terület, s pedig a kerület fele.



Az a oldallal párhuzamos érintő által lemetszett H_1 háromszög hasonló az eredeti H háromszöghöz, így a beleírt k_1 kör ϱ_1 sugara ugyanannyiad része ϱ-nak, mint H_1 valamelyik hosszúsági mérete H megfelelő méretének. Célszerű az a oldalra merőleges m_{a1} és m_a magasságok arányát vennünk, mert $m_{a1} = m_a - 2\varrho$. Másrészt $m_a = 2\,t/a$, így

$$m_{a1} = \frac{2t - 2a\varrho}{a}, \quad \text{és} \quad \varrho_1 = \frac{t - a\varrho}{t} \cdot \varrho = \varrho - \frac{\varrho^2}{t}\,a.$$

Itt a helyére b-t, majd c-t írva a b, ill. c oldallal párhuzamos érintő lemetszette háromszögbe írt kör ϱ_2, ill. ϱ_3 sugarát kapjuk. Így a négy kör területének összege kiemeléssel, a négyzetek kifejtésében a hasonló szerkezetű tagokat mindjárt egybefogva, továbbalakítással, végül mindent az oldalakkal kifejezve

$$\begin{aligned}\pi(\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2) &= \pi\left[4\varrho^2 - \frac{2\varrho^3}{t}(a+b+c) + \frac{\varrho^4}{t^2}(a^2+b^2+c^2)\right] = \\ &= \frac{\pi\varrho^4}{t^2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{\pi t^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2) = \\ &= \frac{\pi(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}\end{aligned}$$

(ugyanis a szögletes zárójel első két tagjának összege 0).

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használva a $\varrho_1 : \varrho$ arányt H_1 és H kerületeinek arányából határozzuk meg. Legyenek H_1 új csúcsai B_1, C_1 (utóbbi az AC-n) és érintse k az AB, B_1C_1, CA, BC egyenest rendre a C', A'', B', A' pontban. Ekkor a k-hoz a B_1, C_1, B, C és A pontokból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján H_1 kerülete

$$\begin{gathered}AB_1 + B_1C_1 + C_1A = (AB_1 + B_1A'') + (A''C_1 + C_1A) = (AB_1 + B_1C') + \\ +(B'C_1 + C_1A) = AC' + B'A = AB - BC' + AC - B'C = \\ = AB + AC - (BA' + A'C) = c + b - a = 2(s-a).\end{gathered}$$

Így $\varrho_1 = \varrho(s-a)/s$, és a fentiekhez hasonló rendezési lépésekkel

$$\begin{aligned}\pi(\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2) &= \frac{\pi\varrho^2}{s^2}\left[s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2\right] = \\ = \frac{\pi t^2}{s^4}&\left[4s^2 - 2s(a+b+c) + (a^2+b^2+c^2)\right] = \frac{\pi t^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Nagy Sarolta (Budapest, Hámán K. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A H_1 és H közti λ lineáris nagyítási arányt abból is megkaphatjuk, hogy k a H_1-re nézve külső érintő kör. H_1 oldalai $a_1 = \lambda a$, λb, λc, kerületének fele $s_1 = \lambda s$, területe pedig $t_1 = \lambda^2 t$, így a külső érintő kör sugarára ismert $\varrho_a = t/(s-a)$ kifejezés[1] értelemszerű alkalmazásával

$$t/s = \varrho = t_1/(s_1 - a_1) = \lambda t/(s-a), \quad \text{és így} \quad \lambda = (s-a)/s.$$

[1]Lásd pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai Versenytételek I, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 36. o.