I. megoldás. Rendezzük át (1) bal oldalát a második tényezőben fellépő a, b ill. c tag szorzóit foglalva össze, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\le 3\,abc. \tag{2}$$

Adjunk a bal oldal első tagjához $2\,abc$-t, a második és harmadik tagból és a jobb oldalból vonjunk le ugyanennyit:

$$a[(b+c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c[(a-b)^2-c^2]\le abc.$$

A bal oldal így alakítható tovább a második tényezőket szorzattá alakítva, majd kiemeléssel és újabb szorzattá alakítással:

$$\begin{gathered}a(b+c-a)(b+c+a)+b(c-a+b)(c-a-b)+\\ +c(a-b-c)(a-b+c)=\\ =(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]=(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c),\end{gathered}$$

tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakban is írható

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\le abc. \tag{3}$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt a bal oldal tényezői pozitívok. Felírva két-két tényezőre a mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenséget, ezek szorzata (3)-at adja:

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}\le a,\qquad \sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)}\le c,$$
$$\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)}\le b.$$

Lévai Ferenc (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (3) – és vele együtt (1) is – akkor is érvényes, ha a, b, c olyan pozitív számok, amelyek nem teljesítik a háromszög-egyenlőtlenséget. A szimmetria miatt elég az $a\ge b\ge c$ esetre szorítkoznunk, ekkor a bal oldal első két tényezője pozitív, a harmadik negatív vagy 0, tehát (3) valóban fennáll.

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

2. Az (1) szimmetrikus volta miatt feltehető, hogy $a\le b$, $a\le c$. A jobb és bal oldal különbsége

$$\begin{gathered}a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)=\\ =a(a-b)(a-c)+(b-c)(b^2-ab+ac-c^2)=\\ =a(b-a)(c-a)+(b-c)^2(b+c-a)\end{gathered}$$

alakra hozható. Erről is látszik, hogy nem negatív, ha a, b, c tetszés szerinti nem negatív számok; 0 is csak az $a=b=c$ esetben lesz.

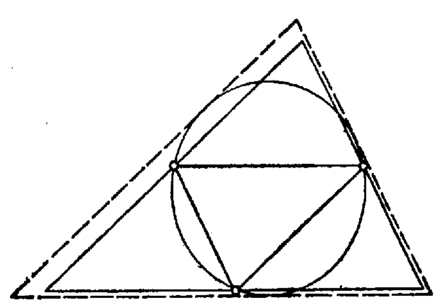
II. megoldás. Az egyenlőtlenség fenti (2) alakját bizonyítjuk. A zárójelek helyére a koszinusz-tétel alapján a megfelelő szorzatot írva, majd pedig a pozitív $2\,abc$-vel osztva ezt kell bizonyítanunk:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le 3/2.$$

Ezzel a feladatot lényegében visszavezettük az 1964. évi Orsz. Középisk. Matem. Tanulm. Verseny II. fordulójának 1. feladatára, aminek részletes vizsgálatát a K. M. L. 29. kötetének 105–107. oldalán láttuk (IV. és V. megoldás), egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Az idézett versenyfeladat V. megoldásához fűzött megjegyzés szerint (1) bal oldalát $2\,abc$-vel osztva a hányados $1+\varrho/r$, ahol ϱ a háromszögbe, r pedig a köréje írt k kör sugara; így a jobb oldal 3/2-del egyenlő, elég tehát a $\varrho/r\le 1/2$, azaz $\varrho\le r/2$ egyenlőtlenséget bizonyítanunk.



Rajzoljunk kört a H háromszög oldalainak felezőpontjain át. Ennek a sugara $r/2$. Húzzunk a körnek a háromszög egyes oldalain túlnyúló ívéhez a megfelelő oldallal párhuzamos érintőt; ha valamelyik oldal érinti a kört, akkor az oldal egyenesét vegyük. Ezek egy a H-hoz hasonló és azt tartalmazó H_1 háromszöget alkotnak. Így H beírt körének sugara legfeljebb akkora lehet, mint H_1-é, vagyis legfeljebb $r/2$, és ekkora is csak akkor lehet, ha H-t beírt köre mindhárom oldalának felező pontjában érinti, ami nyilvánvalóan csak szabályos háromszögnél következik be.

Megjegyzés. A $\varrho \leq r/2$ egyenlőtlenségre további bizonyítások találhatók pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. rész, 3. kiadás (Tankönyvkiadó, Budapest 1965) 40. o. és II. rész, 2. kiadás, 86. o.