a) n helyére az első tíz természetes számot véve 2^n-1 értéke

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 15,\quad 31,\quad 63,\quad 127,\quad 255,\quad 511,\quad 1023,$$

és ezek 7-tel osztva rendre a következő maradékot adják:

$$1,\quad 3,\quad 0,\quad 1,\quad 3,\quad 0,\quad 1,\quad 3,\quad 0,\quad 1.$$

Nézzük meg, hogy a maradékoknak ez a periodikus ismétlődése folytatódik-e. Ha $n=3k$, ahol k természetes szám, akkor

$$2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1^k=(8-1)A=7A,$$

és itt A egész szám, mert bármely pozitív egész k kitevő esetén a^k-b^k osztható $a-b$-vel. $n=3k+1$ és $n=3k+2$ esetén pedig

$$2^{3k+1}-1=2\cdot 2^{3k}-1=2(2^{3k}-1)+1=2\cdot 7B+1=7C+1,$$
$$2^{3k+2}-1=2^2\cdot 2^{3k}-1=4(2^{3k}-1)+3=4\cdot 7D+3=7E+3,$$

ahol B és D az első eset szerint egész számok, így pedig C és E is egész számok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy pozitív egész n esetén 2^n-1 akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha n osztható 3-mal.

b) $2^n+1=(2^n-1)+2$, így 7-tel való osztásánál a maradék az előzők szerint sohasem 0, ugyanis $n=3k$ esetén a maradék 2, $n=3k+1$ esetén 3, $n=3k+2$ esetén pedig 5.

Szalay Mihály (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)