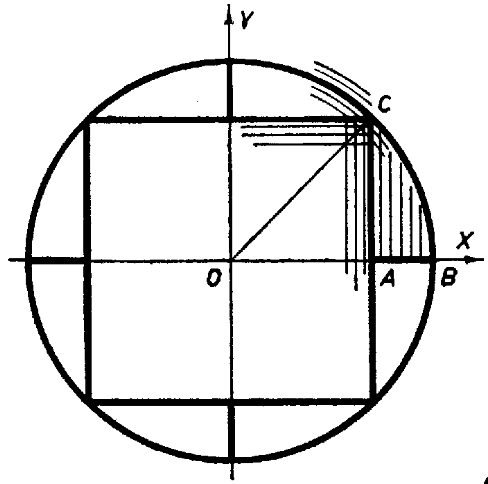

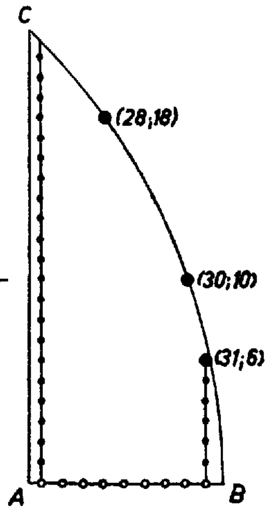

a) A körbe négyzetet írunk, melynek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, az így levágott körszeleteket megfelezzük a tengelyek beléjük eső szakaszaival, és a rácspontokat az így felosztott kör részeiben és az osztásvonalakon számláljuk meg, felhasználva egyszerűsítéshez a szimmetriákat.

A négyzet oldalai az $x=\pm\sqrt{500}$, $y=\pm\sqrt{500}$ egyenesek, ezeken nincs rácspont, mert 500 nem négyzetszám. $\sqrt{500}\approx 22{,}3\ldots$, eszerint a négyzet belsejében vannak mindazok a rácspontok, amelyek mindkét koordinátájának abszolút értéke nem nagyobb 22-nél, számuk $(2\cdot 22+1)^2=2025$.

A körszeleteket kettévágó szakaszokon ugyanannyi rácspont van. Az X-tengely pozitív felén levő AB szakasz első rácspontjának abszcisszája az előzők szerint 23, az utolsóé 31, mert B abszcisszája $r=31{,}6\ldots$, így a rácspontok száma a szakaszon 31–22, a 4 ilyen szakaszon pedig 36.

Már csak az ABC fél körszelet belsejében és a BC íven levő rácspontok megszámlálása van hátra, mert a kör még nem tekintett 7 része ebből az origó körüli 90°-os forgatásokkal, a tengelyeken és a tengelyek OC felezőjén való tükrözésekkel előállítható, és minden ilyen szimmetria a rácspontokat is egymásba viszi át.

Az ABC idom mondott rácspontjait a rajtuk átmenő, az Y-tengellyel párhuzamos $x=23,\ 24,\ \ldots,\ 31$ egyenesek szerint csoportosítva számláljuk meg. Ehhez táblázatban feltüntetjük a BC íven levő metszéspontjuk $y=\sqrt{1000-x^2}$ ordinátáját, így rácspontjaik n száma mindig y egész része. Az n oszlopban álló számok összege 136, így a körben levő rácspontok száma

$$2025+36+8\cdot 136=3149.$$

x	x^2	$y^2=1000-x^2$	y	n
23	529	471	21,7...	21
24	576	424	20,5...	20
25	625	375	19,3...	19
26	676	324	18 egész	18
27	729	271	16,4...	16
28	784	216	14,6...	14
29	841	159	12,6...	12
30	900	100	10 egész	10
31	961	39	6,2...	6

b) Az eddigieket a további előírt r^2 értékek esetéhez is felhasználhatjuk. Az ezekhez tartozó négyzetekben, az AB szakaszon és szimmetrikusain a rácspontok száma annyi, mint $r^2=1000$ esetén, mert ehhez képest a legkisebb és a legnagyobb r^2 érték esetében a négyzetgyökök egész része változatlan:

$$\sqrt{497{,}5}=22{,}3\ldots,\quad \sqrt{995}=31{,}5\ldots,$$
$$\sqrt{502{,}5}=22{,}4\ldots,\quad \sqrt{1005}=31{,}7\ldots.$$

A táblázat szerint a $(26;18)$ és a $(30;10)$ rácspont rajta van a BC íven. Ezért a kisebb r^2 értékekre áttérve az ABC idomban 2-vel, a körben pedig $8\cdot 2=16$-tal csökken a rácspontok száma. Hasonló eset adódhat, ha az y^2 oszlopban álló számot egymás után 1-gyel, 2-vel, ..., 5-tel csökkentve négyzetszámot kapunk. Egyetlen ilyen eset az $x=31$ egyenes esete, amelyben $997-31^2=6^2$, eszerint r^2-et 996-ra csökkentve a kör rácspontjainak száma ismét 8-cal csökken.

r^2-et 1005-ig növelve a körív nem megy át újabb rácspontokon, mert az y^2 oszlop számait 1-gyel, 2-vel, ..., 5-tel növelve sehol sem lépünk négyzetszámra. Ezek szerint r^2 összes vizsgált értékeihez a megfelelő kör belsejében és kerületén levő rácspontok együttes N száma, valamint közülük a kerületen levők M száma

$r^2=$	995,	996,	997,	998,	999,	1000,	1001,	1002,	1003,	1004,	1005,
$N=$	3125,	3125,	3133,	3133,	3133,	3149,	3149,	3149,	3149,	3149,	3149,
$M=$	0,	0,	8,	0,	0,	16,	0,	0,	0,	0,	0.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. I. Hasonló, de kissé hosszabb számítás szerint az $r^2 = 1000$ értéket megtartva, de a kört a $(0{,}5; 0)$, vagy a $(0{,}5; 0{,}5)$ pont körül írva a rácspontok száma mindkét esetben 3144.

2. Kézenfekvő sejtés, (amit a „közelítőleg” megfelelő precizírozása mellett nem túl nehéz igazolni), hogy a koordinátarendszerbe egy elég nagy konvex idomot helyezve a benne levő rácspontok száma és az idom területének mértékszáma közelítőleg egyenlők. Erre támaszkodva eredményeinkből π-re kaphatunk 3,14 körüli közelítő értéket.