

Az  $f = 1, g = 2, h = -2, k = -1$  számnégyesből kiindulva

$$u = 27, \quad t = -99, \quad p = 63, \quad q = -225, \quad r = 153, \quad s = 117,$$

és így  $x = -162, y = 288, z = 36$ . Az utolsó három szám köbösszege  $19\,683\,000 = 270^3$ , és itt 270 egyenlő az  $r$ -re és  $s$ -re adódott értékek összegével.

Hasonlóan az  $f = -1, g = 1, h = 1, k = 0$  négyesből  $r = 5, s = -12; x = -20, y = 14$  és  $z = 17$ , így  $x^3 + y^3 + z^3 = (-7)^3$ , és ismét  $-7 = 5 - 12$ .

E két példából a következő egyenlőséget sejtjük:

$$(1) \quad (p+q)^3 + (p-q)^3 + (r-s)^3 = (r+s)^3.$$

Ezt fogjuk bebizonyítani annak belátásával, hogy a bal és jobb oldal  $K$  különbsége 0. Evégett  $K$ -ból az adott képletek alapján egymás után kiküszöböljük  $q$ -t és  $r$ -et, majd  $p$ -t és  $s$ -et.

A zárójelek felbontása, összevonás és új kiemelések után a különbség így alakul

$$\begin{aligned} K &= [(p+q)^3 + (p-q)^3] - [(r+s)^3 - (r-s)^3] = \\ &= 2p(p^2 + 3q^2) - 2s(s^2 + 3r^2). \end{aligned}$$

Az első zárójeles kifejezést képezve a négyzetek kétszeres szorzataiból adódó két tag összege 0, és a maradó kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} p^2 + 3q^2 &= f^2t^2 + 9q^2u^2 + 3g^2t^2 + 3f^2u^2 = \\ &= (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2); \text{ ugyanígy} \\ s^2 + 3r^2 &= (h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2), \text{ ezért} \\ K &= 2(t^2 + 3u^2)[p(f^2 + 3g^2) - s(h^2 + 3k^2)]. \end{aligned}$$

Sejtésünk igazolására elég lesz megmutatnunk, hogy a szögletes zárójelbeli  $L$  kifejezés értéke mindig 0.

Célszerű egybetűs jelölést bevezetni az  $L$ -beli zárójeles kifejezésekre, mert ezek  $u$ -ban és  $t$ -ben is fellépnek. Legyen  $f^2 + 3g^2 = A, h^2 + 3k^2 = B$ , így  $p$  és  $s$  kiküszöbölésével és a tagok átcsoportosításával

$$\begin{aligned} L &= pA - sB = (ft + 3gu)A - (ht + 3ku)B = \\ &= t(fA - hB) - u(3kB - 3gA). \end{aligned}$$

Az első zárójelben  $u$  áll, a másodikban pedig  $t$ , így valóban  $L = 0$ .

Mint hogy  $f, g, h, k$  egész számok, ugyanez áll  $u$ -ra,  $t$ -re;  $r$ -re,  $s$ -re, ennél fogva (1) jobb oldalán  $r + s$  egész szám. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Természetesen  $x, y, z$  is mindig egész számok.

*Bárány Imre* (Budapest-Mátyásföld, Corvin M.G.)

Több megoldás nem érkezett. Az eredeti kitűzés hibás voltára viszont többen rámutattak.