A polinom alakoknak az x-et páratlan kitevővel tartalmazó tagjai 0 együtthatóval kell hogy szerepeljenek a szorzatban. Ez a feltétel egyenletrendszert szolgáltat a keresett együtthatókra. Ezt felírva az 5-öd, 3-ad és elsőfokú tag együtthatójára:

$$-1+p=0, \qquad 2-6p-q+r=0, \qquad 2q-6r=0.$$

Innen $p=1$, majd $q=-6$ és $r=-2$, végül (1) második tényezője és a szorzat polinom alakja:

$$x^3+x^2-6x-2, \qquad \text{ill.} \qquad x^6-13x^4+40x^2-4.$$

(2) esetében hasonlóan a következő rendszert kell megoldanunk:

$$c+p=0,$$

(3)
$$e+dp+cq+r=0,$$

(4)
$$fp+eq+dr+cs=0,$$

(5)
$$fr+es=0.$$

Mindenesetre $p=-c$; r-et (3) alapján kiküszöbölve q-ra és s-re teljesülnie kell az

(4a)
$$(e-cd)q+cs=cf-cd^2+de$$

(5a)
$$-cfq+es=-cdf+ef$$

rendszernek. Vonjuk ki (5a) c-szeresét (4a) e-szereséből:

(6)
$$(c^2f-cde+e^2)q=(c^2f-cde+e^2)d.$$

Tekintsük először azt az esetet, ha

(7)
$$c^2f-cde+e^2=K$$

értéke nem 0. Ekkor a (4a), (5a) rendszer egyértelműen megoldható: $q=d$, továbbá $s=f$ (ugyanis s együtthatói, c és e közül legalább az egyik nem 0, különben $K=0$ állna fenn). Ezekkel (3)-ból $r=-e$, és így (2) második tényezője, ill. polinom alakja

(8)
$$g(x)=x^4-cx^3+dx^2-ex+f,$$

$$x^8+(2d-c^2)x^6+(d^2-2ce+2f)x^4+(2df-e^2)x^2+f^2.$$

Ha $K=0$, akkor $c\neq 0$ esetén (4a)-ból, majd (3)-ból

$$s=f-d^2+\frac{de}{c}+\left(d-\frac{e}{c}\right)q=f+\left(d-\frac{e}{c}\right)(q-d),$$

(9)
$$r=-e-c(q-d).$$

(8) felhasználásával (2) második tényezője így írható:

$$g_1(x)=g(x)+(q-d)\left(x^2-cx+d-\frac{e}{c}\right),$$

akármi is q, és könnyen ellenőrizhető, hogy (2) kifejtése ebben az esetben is x-nek csak páros hatványait tartalmazza.

Ha pedig $K=0$ és $c=0$, akkor ezekből $e=0$ és $p=0$, így a (3) – (5) feltételi egyenletekben nem lép fel s, tehát s értéke is tetszés szerinti, másrészt (3)-ból $r=0$. Erre az esetre (2) így alakul:

$$(x^4+dx^2+f)(x^4+qx^2+s),$$

már ebben az alakban sem lép fel x páratlan kitevős hatványa.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az egyes tényezők páros és páratlan tagjait különválasztva könnyű különválasztani a szorzat páros és páratlan tagjait is. Az első esetben

$$\left[x(x^2-6)-(x^2-2)\right]\left[x(x^2+q)+(px^2+r)\right]=x^2(x^2-6)(x^2+q)-$$
$$-(x^2-2)(px^2+r)+x\left\{(x^2-6)(px^2+r)-(x^2-2)(x^2+q)\right\}.$$

Itt a kapcsos zárójelben összevonáskor minden tagnak ki kell esnie, így x minden értékére is el kell tűnnie a polinomnak. Az x^2 helyére 0-t, 2-t és 6-ot téve könnyen kiszámítható p, q, r.

A második szorzatból hasonlóan az adódik, hogy

$$(cx^2+e)(x^4+qx^2+s)+(x^4+dx^2+f)(px^2+r)$$

kell hogy azonosan 0 legyen. Itt kézenfekvő x^2 helyébe többek közt $-e/c$-t helyettesíteni. Ekkor a második szorzat első tényezője $e^2/c^2-de/c+f=(e^2-cde+c^2f)/c^2$, ami rávilágít e kifejezés eltűnésének a szerepére a feladat megoldásában.