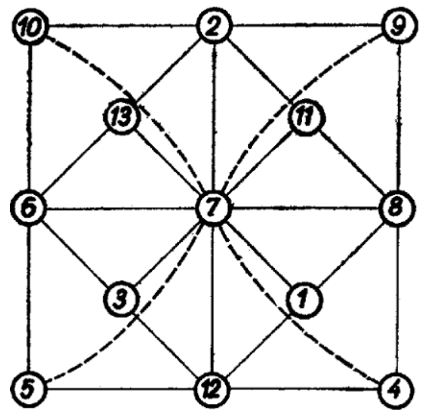
Legyen a középső körbe írandó szám k és az állandó összeg S. Tekintsük az N_1 nagy négyzet három során és az oldalfelező pontok alkotta kisebb, N_2 négyzet oldalfelezőin álló öt összeg összegét. Ebben minden adott szám egyszer lép fel és k további kétszer. Az előírt számok összege 91, így a következő egyenletet kapjuk

$$91 + 2k = 5S. \tag{1}$$



Tekintsük másrészt N_1 középső sora, középső oszlopa és N_2 jobbra lejtő oldalfelezője összegeinek összegét, és vonjuk ki belőle N_2 két balra lejtő oldalának összegét. A különbség egyrészt a k szám háromszorosa, másrészt S háromszorosának és kétszeresének különbsége, azaz

$$3k = S.$$

Ezt (1)-gyel összekapcsolva $k = 7$, $S = 21$. Ezzel az I. és a II. állítást bebizonyítottuk.

A III. állítással ellentétben N_2 felső csúcsára páratlan számot írva, az alsó csúcsra az őt $S - k = 14$-re kiegészítő számot kell írnunk, ami szintén páratlan. Ha még a bal oldali csúcson is páratlan számmal próbálkozunk, akkor az összeg-követelmény alapján előbb a jobb oldali csúcsra, majd N_2 oldalfelező pontjaiba is páratlan számot kell írnunk, mert ha három egész szám összege, továbbá a számok közül is kettő páratlan, akkor a harmadik szám is az. Így kilenc páratlan számot használnánk fel, holott az előírt számok között csak hét van, ilyen elrendezés tehát lehetetlen. Ha viszont N_2 bal oldali csúcsán páros számmal próbálkozunk, az összeg-követelmény alapján N_2 további öt száma páros lesz, és még két páros szám kell N_1 csúcsaiba is, mert a bal és jobb oszlopon csak így lehet páratlan az összeg. Ez sem lehetséges, mert az előírt számok között csak hat páros van. Eszerint a III. állítás igaz, és ha van megoldás, abban a hat páros számból alakítható $2 + 12 = 4 + 10 = 6 + 8 = 14$ összegek közül kettőnek a tagjai állnak N_2 egy-egy átlóján.

Nem lehet a mondott két összeg sem az első kettő, sem az utolsó kettő. Ugyanis az első esetben N_2 két szomszédos csúcsára 10 és 12 jut, összegük nagyobb S-nél. A második esetben N_2 három egymás utáni csúcsán 4, 8, 10 áll, és az első kettő között 9, így pedig a hátra levő 2-es szám N_1 egyik csúcsára sem tehető, mert valamelyik oldalon együtt állna 10-zel vagy 4-gyel, és sem $2 + 10 = 12$, sem $2 + 4 = 6$ nem egészíthető ki 21-re a hátra levő számokból.

A kimaradt $2 + 12$, $6 + 8$ összegpárt írva N_2 átlóira és betöltve N_2 további számait, a még be nem írt 4, 5, 9, 10 számok N_1 csúcsain csak az ábra szerinti elrendezésben felelnek meg, ugyanis a felső soron hiányzó $21 - 2 = 19$ csak $10 + 9$ alakban, a bal oldalon hiányzó $21 - 6 = 15$ csak $10 + 5$ alakban állítható elő közülük, ezek közös tagja került N_1 bal felső csúcsára.

Az ábra elrendezése megfelel az előírásoknak, ide értve a IV. tulajdonságot is. A négyzet szimmetriái miatt a megoldás 8 állásban írható be az ábrába.

Fleischer Tamás (Budapest, József A. g. IV. o. t.)