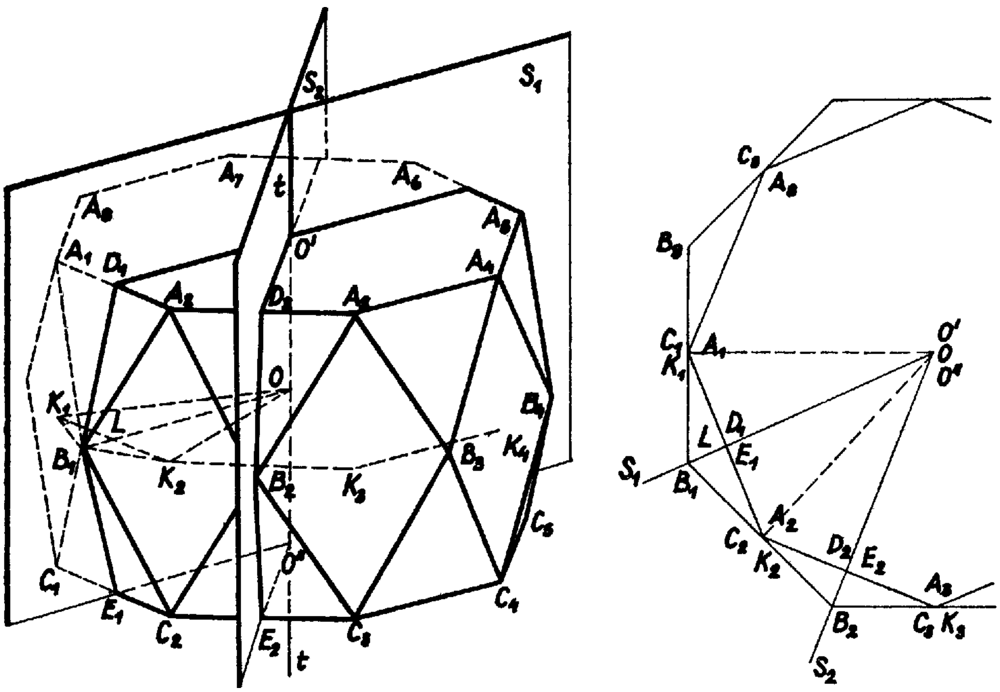
I. Építsük fel gondolatban a test modelljét a lapokat az előírt rendben egymás mellé illesztve. A test összes élei egyenlők, mert minden lapja egyenlő oldalú idom, legyen a közös hosszuk c. Legyenek az N' nyolcszöglap egymás utáni csúcsai A_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$ az indexek növekedő rendjében, az A_iA_{i+1} oldalhoz csatlakozó H_i háromszöglap harmadik csúcsa B_i (a 8-nál nagyobbnak adódó indexek mindig 8-cal csökkentve értendők), továbbá a H_i és H_{i+1} közé illeszkedő rombusz $B_iA_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}=R_{i+1}$. Így az R_i és R_{i+1} közé illeszkedő második háromszöglap $B_iC_iC_{i+1}$, és a C_i csúcsok az indexek növekedő rendjében az N'' nyolcszöglap egymás utáni csúcsai.



Megmutatjuk, hogy az N' és N'' középpontját összekötő tengely körül $k\cdot 45^\circ$ forgásokkal a test önmagával fedésbe jut, és a tengely felezőpontja a test középpontja. B_i Az A_iA_{i+1} él S_i felező merőleges síkján van, és ezen van B_{i+4} is, mert N' szabályos volta miatt S_i az $A_{i+4}A_{i+5}$ élt is merőlegesen felezi. B_i és B_{i+4} ugyanígy a C_iC_{i+1} és $C_{i+4}C_{i+5}$ élek közös felező merőleges síkjának is pontjai, így pedig e két sík azonos, mert mindkettő merőleges N' és N'' síkjára, és a B_iB_{i+4} egyenesen át csak egy merőleges sík állítható rájuk. N' és N'' síkját alapsíknak fogjuk nevezni. (Itt felhasználtuk, hogy B_i és B_{i+4} különböző pontok, és hogy összekötő egyenesük nem merőleges az alapsíkra; valóban, H_i-t és H_{i+4}-et alapélük körül forgatva B_i és B_{i+4} (S_i-beli) pályájának nincs közös pontja, mert N' két párhuzamos oldalának távolsága $c(1+\sqrt{2})$, és ennek fele nagyobb a c oldalú szabályos háromszög magasságánál, $c\sqrt{3}/2$-nél.) Az eddigiekből az is adódik, hogy $C_iC_{i+4}\parallel A_iA_{i+4}$, és hogy C_i ugyanazon az oldalán van S_i-nek, mint A_i.

Tekintsük most az 1-gyel nagyobb indexű pontokból ugyanígy adódó S_{i+1} síknak S_i-vel való t metszésvonalát (ami létezik, mert $A_{i+1}A_{i+2}$ nem párhuzamos A_iA_{i+1}-gyel). t merőleges az alapsíkokra, és azokkal való O', ill. O'' metszéspontja az illető lap középpontja. Ugyanis pl. O' annak a két egyenesnek a közös pontja, amelyeket S_i, S_{i+1} metsz ki az alapsíkból, ezek mindegyike szimmetriatengelye N'-nek, és két szimmetriatengely a szabályos sokszög középpontjában metszi egymást.

Legyen A_iA_{i+1} felezőpontja D_i, C_iC_{i+1}-é E_i, így $D_iO'O''E_i$ téglalap, mert O'-nél és O''-nél derékszöge van, és a nyolcszögek egybevágósága miatt $D_iO'=E_iO''$, ezért $D_iE_i\parallel t$, továbbá $A_iD_iE_iC_i$ is téglalap, tehát $A_iC_i\parallel t$.

Ezek szerint R_i-nek $B_{i-1}B_i$ átlója párhuzamos az alapsíkokkal, mert merőlegesen felezi az A_iC_i átlót, és így minden B_i benne van $O'O''$ felező merőleges síkjában. A rombuszok K_i középpontjai (ebben a síkban) egy az N'-vel egybevágó N nyolcszöget alkotnak, oldalaik páronként párhuzamosak; legyen N középpontja O. Így OK_i felezi a $B_{i-1}OB_i=45^\circ$ szöget, másrészt $K_iB_{i-1}=K_iB_i$, ezért B_iB_{i-1} merőleges OK_i-re, és $OB_{i-1}=OB_i$, a B_i csúcsok egy N''' szabályos nyolcszög csúcsai, O valóban a test középpontja, és minden olyan forgatással és tükrözéssel önmagával fedésbe jut, amely N'-t és N''-t önmagába viszi át.

Ebből következik, hogy egyrészt az A_i és C_i csúcsok, másrészt a B_i-k egy-egy O középpontú gömb felületén vannak, és ezek sugarainak nagyobbika adja a testet magába záró legkisebb gömb keresett sugarát.

II. A K_1K_2 szakasz felező pontját L-lel jelölve az OK_1L, az OK_1B_1, a B_1D_1L, végül az OA_1K_1 derékszögű háromszögből

$$OK_1 = \frac{K_1L}{\sin 22{,}5^\circ} = \frac{c}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \quad OB_1 = \frac{OK_1}{\cos 22{,}5^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} = c\sqrt{2},$$

$$OL = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} 22{,}5^\circ = \frac{c}{2}(1+\sqrt{2}), \quad \text{és így} \quad B_1L = \frac{c}{2}(\sqrt{2}-1),$$

$$A_1K_1 = D_1L = \sqrt{B_1D_1^2 - B_1L^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4} - \frac{c^2}{4}(3-2\sqrt{2})} = \frac{c}{\sqrt[4]{2}},$$

$$OA_1 = \sqrt{OK_1^2 + A_1K_1^2} = c\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Az utóbbi nagyobb, mint $c\sqrt{1+1} = OB_1$, ezért a testet magába záró legkisebb gömb sugara $OA_1 \approx c \cdot 1{,}55$.

III. A testet az N' és N'' megfelelő oldalain átmenő síkokkal 8 egybevágó gúlára és egy N' alapú hasábra darabolhatjuk. A $B_1A_1A_2C_2C_1$ gúla térfogata $A_1A_2 \cdot A_1C_1 \cdot B_1L/3$, ahol $A_1C_1 = 2A_1K_1$, ez egyszersmind a hasáb magassága, így N' ismert területképlete alapján a test térfogata

$$V = A_1A_2^2 \cdot A_1C_1 \left(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} + 2(1+\sqrt{2}) \right) = c^3 \frac{2\sqrt[4]{8}}{3}(1+5\sqrt{2}).$$

Szemkeő Judit (Budapest, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.) dolgozata, bizonyítással kiegészítve.