

a) Az első pilóta – legyen a neve Elek – első hallásra valóban meglepő szavait megmagyarázhatjuk a második pilóta – nevezzük őt Mátyásnak – kérdése alapján. Mátyás tudta, hogy Elek legalább 10 000 km-t bejárt útvonalon repült. Ez a délkörön megtett első és harmadik útszakaszra vonatkozóan megérthető abból, hogy észak felé haladva az Északi-sark átlépése után már dél felé haladunk (megváltozik irányunknak a neve). Ha most valahol megállunk, majd ismét észak felé indulva az addigival egyenlő utat teszünk meg irányváltoztatás nélkül, akkor valóban visszaérkezünk kiindulópontunkba. – A 3. útszakasz kezdőpontjának az 1. útszakasz végpontjával való egybeesése viszont úgy lehetséges, hogy közben Elek egy szélességi körön repült (mindig az észak-déli irányra merőlegesen), és annak a szélességi körnek a kerülete egész számszor van meg a 2. szakasz 10 000 km-es hosszában. Mátyás éppen ennek a szélességi körnek kerületét kérdezte burkoltan Elektől, a válaszból aztán kiszámította a kör földrajzi szélességét, ebből pedig a felszállási hely szélességét.

Elek válasza szerint 15 000 km-nél kezdett repülni járt szakaszon, így a szélességi kör kerülete 5000 km. Másrészt a  $\varphi$  szélességű kör kerülete km-ben  $40\,000 \cos \varphi$ , mert  $r$  sugarára és a főkör  $R$  sugarára  $r = R \cos \varphi$ , továbbá  $2R\pi = 40\,000$  km, így  $\cos \varphi = 1/8$ ,  $\varphi = 82,8^\circ$ . Eszerint Elek az Északi-sark átrepülése után még  $7,2^\circ$ -ot repült dél felé, és így előzőleg  $82,8^\circ$ -ot észak felé, tehát felszállási helye az északi szélesség  $7,2^\circ$ -án volt (1. ábra).

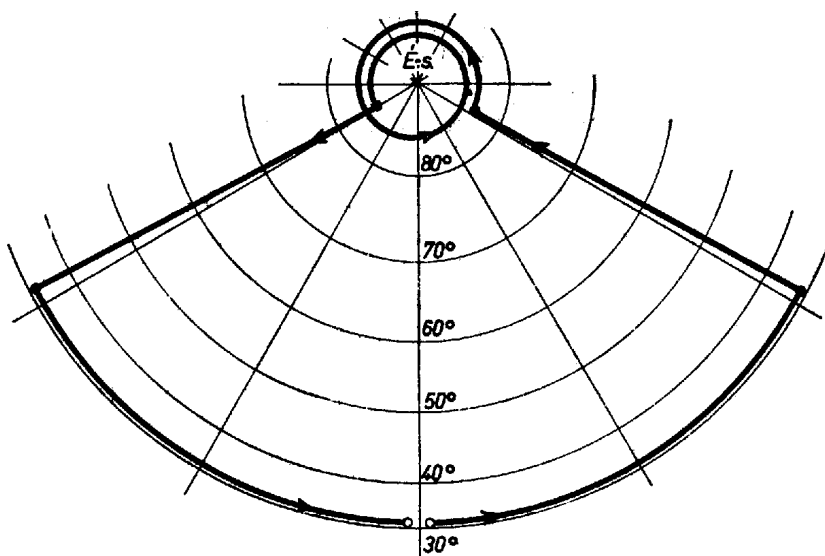


1. ábra

b) Mátyás a maga 2. és 4. útszakaszában délkörön repült, a többi háromban szélességi körön, mégpedig az 1. és 5. szakaszban ugyanazon a  $\varphi$  szélességű körön, különben nem ért volna vissza felszállási helyére.

Ha – a szokástól eltérően – az egész Földön csak keleti hosszúságról beszélünk, és a kezdő délkörön (Greenwich) való keleti irányú átrepüléskor nem vonunk le  $360^\circ$ -ot, akkor Mátyás gépének földrajzi hosszúsága az 1., 3. és 5. szakaszban növekedett, a 2. és 4. szakaszban nem változott, és az egész út folyamán  $360^\circ$ -kal, vagy annak egy egész többszörösével növekedett.

A 2. útszakaszban nem ért fel Mátyás az Északi-sarkig, mert ha azt átrepülte volna, akkor a 4. szakaszban délnek fordulva a kiindulásinál délibb körre jutott volna. A 6000 km-es útszakaszok a délkörön  $54^\circ$  változást eredményeznek a földrajzi szélességben, ezért Mátyás felszállási helyének szélessége  $54^\circ$ -kal kisebb a 3. útszakasz szélességénél.



2. ábra

Mátyás már egyszer átrepült útvonalon közel 2400 km-t repült.<sup>1</sup> Ez nem eshetett a 4. szakaszba, különben ez az egész útszakasz egyszer bejárt útvonal lenne, ami már magában 20%. – Tegyük fel, hogy a mondott 2400 km a repülés 3. szakaszába esett. Így az ebben bejárt szélességi kör kerülete kb.  $6000 - 2400 = 3600$  km (valamivel több ennél). Így e kör  $\varphi$  szélességére a fenti számításhoz hasonlóan  $\cos \varphi \approx 3600 : 40\,000 = 0,09$ , és így közel  $85^\circ$  adódik.<sup>2</sup> Ezen a körön

<sup>1</sup> A „közel 8%”-ot úgy értjük, hogy 7,5%-nál több, de 8%-nál kevesebb.

<sup>2</sup> A déli szélesség  $85^\circ$ -a nyilvánvalóan nem jön tekintetbe.

Mátyás egyszer körülrepült, és másodszor is megtette közel  $2/3$  részét, így földrajzi hosszúsága a 3. útszakaszban közel  $360^\circ + 240^\circ = 600^\circ$ -kal növekedett. Másrészt ekkor az 1. és 5. útszakasz kevéssel a  $31^\circ$ -os szélességi fok alatt volt, ennek kerülete  $40\,000 \cos 31^\circ$ , ezért a két  $6000$  km-es szakaszon  $360^\circ \cdot 12\,000 / 40\,000 \cos 31^\circ = 108^\circ / \cos 31^\circ \approx 126^\circ$ -os hosszúságnövekedés állt be. Ez a fentivel  $726^\circ$  körüli összeget ad, ami jó közelítéssel két fordulat, innen tehát kellő finomítással megoldást várhatunk.

A földrajzi hosszúság növekedésének a 3. szakaszra eső részét hasonlóan kifejezve,  $\varphi$ -re a következő egyenletet kapjuk:

$$2 \cdot \frac{360^\circ \cdot 6000}{40\,000 \cos(\varphi - 54^\circ)} + \frac{360^\circ \cdot 6000}{40\,000 \cos \varphi} = 720^\circ,$$

$$\frac{6}{\cos(\varphi - 54^\circ)} + \frac{3}{\cos \varphi} = 40.$$

Ezt a szokásos módon átalakítva nem redukálható negyedfokú egyenletre jutunk; ezért közelítő megoldást keresünk próbálgatással.

$\varphi = 85^\circ$  esetén a bal oldal értéke  $7,00 + 34,42 = 41,42$ , ez  $1,42$  többletet mutat a kívánt értékhez képest.  $\varphi$  csökkentésével mindkét nevező nő, és ezért a bal oldal csökken. Valóban,  $\varphi = 84,5^\circ$ -ot véve már hiányt is mutat:  $6,96 + 31,30 = 38,26$ , hiánya  $1,74$ . Így a használt két  $\varphi$  érték között gyök várható, mégpedig a  $85^\circ$ -hoz kissé közelebb, mint a  $84,5^\circ$ -hoz. Valóban  $\varphi = 84,8^\circ$  esetén a bal oldal értéke  $6,98 + 33,10 = 40,08$ . – Eszerint Mátyás a  $30,8^\circ$ -os északi szélességű körről szállt fel, 3. útszakaszán a szélességi kör kerülete kb.  $3626$  km, így a kétszer berepült útvonala  $2374$  km, ami  $7,9\%$ .

Ennek igazolására megmutatjuk még, hogy nem lehetett kétszer berepült rész Mátyás útvonala 1. és 5. szakaszában. Ugyanis ezt téve fel az illető szélességi kör kerülete kevéssel több volna  $2 \cdot 6000 - 2400 = 9600$  km-nél. Így szélességére közelítőleg  $\cos \varphi = 0,24$ , amiből egyrészt felszállási helyként csak a  $76^\circ$ -os déli szélességű kör valamely pontja jön szóba, a 3. útszakaszra pedig a  $22^\circ$ -os déli szélességű kör. Másrészt az 1. és 5. szakaszban elért hosszúságnövekedés csak kb.  $360^\circ \cdot 12\,000 / 9600 = 450^\circ$ , és ezt a kb.  $37\,000$  km kerületű  $22^\circ$ -os körön megtett  $6000$  km nem növelhetné  $510^\circ$ -ra sem.

Egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel a következők dolgozataiból:

*Patkós András* (Budapest, Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)

*Siket Aranka* (Makó, József A. g. III. o. t.)

*Sükösd Csaba* (Budapest, József A. g. III. o. t.)