I. Az $1/491$ hányados egész része 0, és a részletmaradék 1. Kényelmesebb lesz a lépések sorszámozását ez után elkezdeni, így a k-adik lépésben a részletosztandó, a hányados abból kapott számjegye és a részlet maradék helyi értéke 10^{-k}. Az állítás szerint a 13. részlet maradék 2. Valóban, $i=1, 2, \dots, 13$ esetén az osztás i-edik lépésében az A részletosztandó, a hányados j új számjegye és az R részletmaradék értéke az alábbi táblázat

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	10	100	1000	180	1800	3270	3240	2940	4850	4310	3820	3830	3930
j	0	0	2	0	3	6	6	5	9	8	7	7	8
R	10	100	18	180	327	324	294	485	431	382	383	393	2

szerint alakul, és $R_{13}=2$. A 13 lépéssel való előrehaladás azt jelenti, hogy az $1\cdot 10^{13} : 491$ hányados egész részének megállapítása után a maradék 2, vagyis $10^{13}=491\cdot B+2$, ahol B egész szám.

Legyen az $1:491$ osztás k-adik lépése után a részletmaradék r, ahol $0<r<491$, egész szám, eszerint $10^k = 491\,C+r$ (C és minden további nagy betű egész számot jelöl). Keresnünk kell a $10^{k+13} : 491$ hányados egész részének megállapítása után mutatkozó maradékot. Az osztandó így alakítható:

$$10^{k+13}=10^k\cdot 10^{13}=(491\;C+r)(491\;B+2)=491\;D+2\,r,$$

ahol $0<2r<982$.

Mármost $0<r<246$ esetén $0<2\,r<492$, és mivel $2\,r$ páros, $0<2\,r<491$, így a $10^{k+13} : 491$ hányados egész része D, és maradéka az 1. állításnak megfelelően $2\,r$. Ha pedig $245<r<491$, akkor $490<2\,r<982$, és $2\,r$ páros, tehát $491<2\,r<982$, $2\,r$-ben az osztó még 1-szer megvan, a hányados egész része $D+1$, és a maradék

$$r'=2\,r-491;$$

erre ugyanis teljesül $0<r'<491$. Ezzel az 1. és 2. kérdésre válaszoltunk.

II. A 3. állításra egy példát látunk a fenti táblázatban: $R_3=18=9\cdot 2$, és $R_{13}=2$. Eszerint a $18\cdot 10^{10} : 491$ hányados egész részének megállapítása után fellépő maradék 2, vagyis $18\cdot 10^{10}=491\;E+2$. Itt E páros, mert a bal oldal és a jobb oldal második tagja az, 491 pedig páratlan, vagyis $E=2\,F$, és ezért $9\cdot 10^{10}=491\;F+1$.

Tegyük fel, hogy az $1:491$ osztás m-edik lépése utáni maradék $r=9\,s$, ahol s egész, és $0<9\,s<491$, vagyis $10^m=491\;G+9\;s$. Ekkor a 10 lépéssel későbbi maradék 10^{m+10}-nek 491-gyel való osztásánál keletkezik. Mivel

$$10^{m+10}=491\cdot G\cdot 10^{10}+9\cdot 10^{10}\;s=491\;\big(G\cdot 10^{10}+F\cdot s\big)+s,$$

tehát a maradék valóban 9-ed része r-nek.

III. A szakasz számjegyei számának megállapításához az [1]-ben megengedett tételen túl a következőt is felhasználjuk[2]: az a/b hányadoshoz tartozó végtelen tizedes tört szakasza közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik, ha b relatív prím 10-hez. Eszerint az a kérdés, hányadik lépésben ismétlődik meg először az 1. lépés előtti részletmaradék, az 1 szám; ekkor a szakasz jegyeinek száma egyenlő a talált sorszámmal.

Mivel 491 prím, a szakasz hossza a felhasználható tétel szerint 490 valamelyik osztója, tehát az 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 49, 70, 98, 245 és 490 számok valamelyike; az ilyen sorszámú R_i részletmaradékokat kell megvizsgálnunk. Az első öt a táblázat szerint különböző 1-től, továbbá $R_{14}=20$. Ha a szakasz jegyeinek száma 70 volna, akkor R_{78} egyenlő volna $R_{78-70}=R_8$-cal, ami 485; viszont az I. eredmény szerint $R_{78}=R_{6\cdot 13}=2^6\neq +485$. Hasonlóan

$$R_{104}=R_{8\cdot 13}=2^8=256\neq 324=R_6,$$

így a jegyek száma nem egyenlő $104-6=98$-cal; továbbá ezért 49-cel sem, valamint 70 felével, 35-tel sem, hiszen pl. 49-jegyű szakasz esetén $R_{98}=R_{49}=1$ volna, és vele $R_{104}=R_6$, ami nem teljesül. Végül az 1., 2. és 3. eredmények váltakozó, ismételt alkalmazásával

$$R_{117}=2\;R_{104}-491=21,\quad R_{169}=2^4\cdot R_{117}=336,\quad R_{182}=181,\quad R_{195}=362,$$
$$R_{208}=233,\quad R_{221}=466,\quad R_{234}=441,\quad R_{244}=R_{234}/9=49,$$

ennélfogva a 245. lépésben a részletosztandó és egyben a részletmaradék is 490, vagyis nem 1. Ezek szerint $1/491$ szakaszos tizedes tört alakjában a számjegyek száma csak 490 lehet, ill. az idézett tétel szerint 490.

IV. Az az N (egész) szám, amelynek minden jegye j és jegyeinek száma k, a k db 1-essel írt szám j-szerese:

$$N=\overline{jjj\dots j}=j\cdot 111\dots 1=j\cdot N_1.$$

Másrészt $1964=4\cdot 491$, a tényezők relatív prímek, így N akkor és csak akkor osztható 1964-gye1, ha 4-gyel is és 491-gyel is osztható.

[2] Lásd pl., az [1] alatti könyvben, 139. o., vagy *Erdős P. – Surányi J.:* Válogatott fejezetek a számelméletből (Tankönyvkiadó, Budapest 1960) 51 – 52. o.

Már most j és 491 relatív prímek, mert 491 prím, másrészt $4 = 2^2$ és N_1 relatív prímek, mert N_1 páratlan, így a keresett oszthatóság akkor és csak akkor áll fenn, ha j osztható 4-gyel, és N_1 osztható 491-gyel. Nyilvánvalóan $j = 4$ esetén kapunk kisebb N-et.

N_1 így írható:

$$N_1 = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Helyette 9 N_1-et vizsgálhatjuk, mert N_1-gyel együtt 9 N_1 is osztható 491-gyel; ha viszont 9 N_1 osztható vele, akkor N_1 is, mert ha egy szám osztója egy szorzatnak, de az egyik tényezőhöz relatív prím, akkor a másik tényezőnek osztója.[3] 9 $N_1 = 10^k - 1$ a fentiek szerint akkor osztható 491-gyel, ha a $10^k : 491$ hányados maradéka 1, ami akkor és csak akkor következik be, ha k osztható 490-nel.

Ezek szerint a kívánt számok legkisebbikében valóban minden számjegy 4-es, és a jegyek száma 490.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

[3] Lásd pl. a [2] alatti könyvben, 19. o.