

Egy halom esetén egyetlen vesztes állás az, amelyben egyetlen kő áll az asztalon, jelöljük így: (1); a soron következő kénytelen ezt elvenni, és vesz. Azok az állások, amelyekből az (1) végző vesztes állás előállítható, más szóval a végző megnyerhető állások csak (1,  $a$ ) és ( $b$ ) típusúak lehetnek, ahol  $a \geq 1$  és  $b \geq 2$ . Ilyen állás visszahagyására kell kényszeríteni ellenfelünket utolsó előtti lépésében, az ő ezen lépése előtti állásnak viszont (1,  $a$ )-tól és ( $b$ )-tól különbözőnek kellett lennie, különben mi veszünk. Így az állás típusa nem lehetett más, mint vagy (1,  $a$ ,  $c$ ), ahol  $c \geq 1$ , vagy ( $d$ ,  $a$ ), ahol  $d \geq 2$ , ilyenkor azonban nem lehet  $a = 1$ . Az utóbbi típus adódik ( $b$ )-ből is ( $b$ ,  $e$ ) alakban, ahol  $e \geq 2$ .

Azonban ilyen típusú állásból csak akkor kényszerül az ellenfél nekünk megnyerhető állás előállítására, ha  $c$  és  $d$  nem nagyobb a legkisebb lehetséges értéknél, vagyis ha (1,  $a$ ,  $c$ )-ben  $c = 1$ , és emiatt egyszersmind  $a = 1$ , ill. ha ( $d$ ,  $a$ )-ban  $d = a = 2$ ; különben ugyanis kevesebbet is vehet el. Csak az (1, 1, 1) és a (2, 2) állások biztosítják, hogy az ellenfél két lépésben veszít.

Innen adódik, hogy ( $e$ ,  $e$ ) minden  $e > 2$  esetén is vesztes állás. Ha ugyanis az ellenfél az egyik halmot kiüríti, akkor mi a másiktól 1 követ hagyunk; ha ő hagy 1-et, mi ürítjük ki a másikat, ha pedig 1-nél többet hagy, mi ugyanannyira csökkentjük a másik halmot, tehát vagy már a 2. lépésében vesz a partner, vagy legkésőbb a (2, 2) állásból. – Más két halmos vesztes állás nincs, ti. ( $e$ ,  $f$ ) típusú, ahol  $f > e \geq 2$ , mert ebből az ellenfél állíthat elő ( $e$ ,  $e$ ) típusú, számunkra vesztes állást.

Az ( $e$ ,  $e$ ) az eredeti játékmódban is vesztes állás, minden  $e$  esetén, és ott sincs más két halmos vesztes állás. Eszerint két halmos vesztes állások csak azok az állások, amelyek a nim eredeti játékmódja szerint azok, kivéve közülük az (1, 1)-et.

Az (1, 1, 1) legkisebb összegű három halmos vesztes állás (vesztes trió) utáni legkisebb összegű vesztes trió (1, 2, 3), összege 6, ugyanis a 4 és 5 összegűek megnyerhetőek: (1, 1, 2)-ből az (1, 1, 1) állítható elő, és (1, 1, 3)-ból is, (1, 2, 2)-ből pedig a (2, 2); másrészt az (1, 2, 3) vesztes trió, mert ha nem üríti ki azt a halmot, amelyből elvesz, akkor legalább 4 kő marad, amit most láttunk, ha pedig kiüríti, akkor (0, 2, 3)-ból a (2, 2) állítható elő, különben pedig az (1) vesztes állás. – Az (1, 2, 3) ugyancsak vesztes trió az eredeti játékmód esetén is.

Megmutatjuk, hogy minden az eredeti játékmód szerinti vesztes trió a módosítás stratégiájában is vesztes trió. Tudjuk, hogy ha egy eredeti vesztes trióban van 1 kőből álló halom, akkor az (1,  $2k$ ,  $2k + 1$ ) típusú. Ebből már csak a  $k > 1$  esetet kell tekintenünk. Ha ebből ellenfelünk az 1-es halmot veszi el, mi ( $2k$ ,  $2k$ )-t állítunk elő; ha a másik két halom bármelyikéből 2-nél kevesebb követ hagy, akkor (1)-et vagy (1, 1, 1)-et, ha pedig legalább 2 követ hagy, akkor mi a másik nagy halomban 1-gyel több, ill. kevesebb követ hagyunk aszerint, hogy ő páros vagy páratlan számú követ hagyott vissza, és így (1,  $2m$ ,  $2m + 1$ ) alakú állást (ahol  $1 \leq m < k$ ), azaz eredeti vesztes állást hagyunk ellenfelünkre.

Már csak azok az eredeti vesztes triók vannak hátra, amelyekben mindegyik halomban legalább 2 kő van. Tudjuk, hogy ilyenek minden halmában különböző számú kő van, így sem az (1), sem az (1, 1, 1), sem ( $e$ ,  $e$ ) nem állítható elő belőle, ezért ellenfelünk bármely lépésére az eredeti stratégia szerinti lépéssel válaszolunk.

Stratégiánk csak akkor használható, ha a kiindulási állás vesztes állás és a partner kezd, vagy pedig ha a kiindulási állás megnyerhető és mi kezdünk, (végül, ha a partner hibáz).

Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. G.)  
Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)

---

<sup>1</sup>Lásd a következő cikket: Dr. Báron Gyula: A nim-játék stratégiájáról, a nyerő stratégia felkutatása, K. M. L. 28. (1964) 193–198. o. – Röviden ismételjük a szükséges tudnivalókat. A játékot ketten játsszák, miután bizonyos számú, meg nem különböztetett elemet, pl. követ tetszés szerinti számú halomba osztottak. Felváltva lépnek, egy lépés abban áll, hogy valamely halomból elvesznek valamennyi követ, legalább 1-et, de akár az egész halmot is. Az nyer, aki az utolsó követ veszi el, akár magában, akár az utolsó halom még meglevő köveivel együtt. A nyerő stratégia lényege, hogy húzásunkkal mindig ún. *vesztes állást* állítsunk ellenfelünk elé, amelyből bármely megengedett elvétellel számunkra *megnyerhető állást* állít elő. Van ilyen stratégia: azok a vesztes állások, amelyekben a halmokban levő elemek számát 2-es számrendszerben felírva az egyenlő helyi értékű számjegyek összege mindig páros. Két halom esetén minden vesztes állásban a halmok köveinek száma egyenlő: ( $a$ ,  $a$ ); három halmos vesztes állásban viszont nem lehet két halomban ugyanannyi kő.