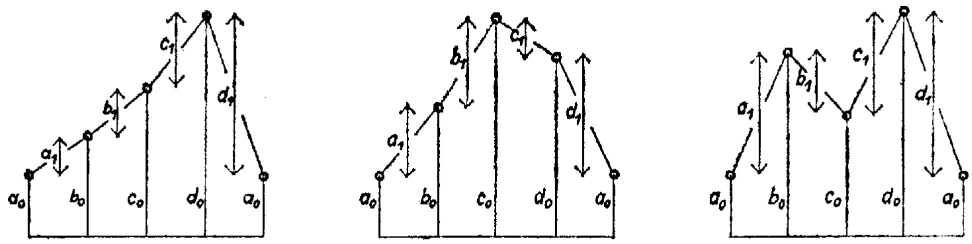
1. a_0 értékét tetszés szerint megválasztva b_0 értéke csak $a_0 - a_1$ vagy $a_0 + a_1$ lehet (ha ti. $a_1 > 0$; $a_1 = 0$ esetén pedig $b_0 = a_0$), írjuk ezt röviden így: $b_0 = a_0 \pm a_1$. Hasonlóan $c_0 = b_0 \pm b_1 = a_0 \pm a_1 \pm b_1$, majd $d_0 = a_0 \pm a_1 \pm b_1 \pm c_1$, végül $a_0 = d_0 \pm d_1 = a_0 \pm a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm d_1$, vagyis

$$\pm a_1 \pm b_1 \pm c_1 \pm d_1 = 0. \tag{2}$$

Hagyjuk figyelmen kívül az érdektelen $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ esetet, így (2) bal oldalán legalább egy szám előtt a + jel érvényes a két jel közül, és legalább egy előtt a mínusz jel. Ebből, a mínusz jellel álló számokat a jobb oldalra áttéve, Q_0 létezésének szükséges feltételeként azt kapjuk, hogy Q_1 számai úgy legyenek rendezhetők két csoportba – ti. a Q_0-on végigmenve növekedést, ill. csökkenést adó változások csoportjára –, hogy

α) mindegyik csoport tartalmazzon legalább egy, a 0-tól különböző számot, és hogy

β) a számok összege a két csoportban ugyanannyi legyen.



Q_0' Q_0'' Q_0'''

E feltételek minden lehetséges esetben elegendők is. Ugyanis α) miatt a két csoportban vagy 3 és 1 szám áll, vagy 2–2 szám. A második esetben a 2–2 egyenlő jelű szám vagy 2 szomszédos párt alkot, vagy páronként szétválasztják egymást, ezért β) a fent idézett megállapításokra tekintettel lényegében 3 különböző típus szerint teljesülhet:

$$a_1 + b_1 + c_1 = d_1, \tag{3'}$$
$$a_1 + b_1 = c_1 + d_1, \tag{3''}$$
$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1. \tag{3'''}$$

(Ha Q_1-ben van 0 tag is, a különböző típusok száma kevesebb.) Ekkor egy az (1)-et kielégítő számnégyes rendre:

$$Q_0' \quad a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + b_1, \quad a_0 + a_1 + b_1 + c_1; \tag{4'}$$
$$Q_0'' \quad a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + b_1, \quad a_0 + a_1 + b_1 - c_1; \tag{4''}$$
$$Q_0''' \quad a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 - b_1, \quad a_0 + a_1 - b_1 + c_1; \tag{4'''}$$

ahol a_0 tetszés szerinti egész szám. Most már ezt is mondhatjuk: Q_0 létezéséhez szükséges és elegendő, hogy Q_1-re a $(3')$–$(3''')$ feltételek valamelyike teljesüljön.

2. Az alábbiakban az a_1, b_1, c_1, d_1 számokat nem valamely Q_0-ból származtatottnak tekintjük. A számötösön végigmenve a kétszeri növekedés és kétszeri csökkenés lényegében két különböző sorrend szerint léphet föl: nő, nő, fogy, fogy, és nő, fogy, nő, fogy, vagyis $a_1 \le b_1 \le c_1 \ge d_1 \ge a_1$, ill. $a_1 \le b_1 \ge c_1 \le d_1 \ge a_1$. Éppen ilyen változások adódnak a fenti Q_0''-ben és Q_0'''-ben is, ezért az ilyen számnégyesekre fennáll a megfelelő második, ill. harmadik típusú

$$a_2 + b_2 = c_2 + d_2, \quad \text{ill.} \quad a_2 + c_2 = b_2 + d_2$$

összefüggés is. Az alábbi táblázatok szerint az első esetben legkésőbb 6, a másodikban legkésőbb 4 lépés után csupa 0 számnégyesre jutunk, hiszen már Q_6'' mindegyik tagja a_5, ill. Q_4''' mindegyik tagja a_4.

$Q"_1$	a_1	$\leqq$	b_1	$\leqq$	c_1	$\geqq$	d_1	$\geqq$	a_1
$Q"_2$	a_2		b_2		c_2		$d_2 = a_2 + b_2 - c_2$		
$Q"_3$	a_3		b_3		c_3		$d_3 = \|d_2 - a_2\| = \|b_2 - c_2\| = b_3$		
$Q"_4$	a_4		b_4		$c_4 = \|c_3 - d_3\| = \|c_3 - b_3\| = b_4$		$d_4 = \|d_3 - a_3\| = \|b_3 - a_3\| = a_4$		
$Q"_5$	$a_5 = \|a_4 - b_4\|$		0		a_5		0		

$Q'"_1$	a_1	$\leqq$	b_1	$\geqq$	c_1	$\leqq$	d_1	$\geqq$	a_1
$Q'"_2$	a_2		b_2		c_2		$d_2 = a_2 - b_2 + c_2$		
$Q"_3$	a_3		b_3		$c_3 = \|c_2 - d_2\| = \|b_2 - a_2\| = a_3$		$d_3 = \|d_2 - a_2\| = b_3$		

(Ez a két sorozat rövidebb is lehet, pl. $c_2 < a_2 < b_2$ esetén $d_2 > b_2$, ezért $a_3 + c_3 = b_2 - a_2 + d_2 - c_2 = 2(b_2 - c_2) = 2b_3 = 2d_3$, ennélfogva $a_3 - b_3 = b_3 - c_3 = c_3 - d_3 = d_3 - a_3$, és már Q_5''-nek is mindegyik tagja 0. A $Q_0 = 1,\ 6,\ 12,\ 5$ számnégyesből viszont csak a 6. lépésben lesz minden tag 0.

3. A föltevés szerint Q_4 teljesíti a $(3')$–$(3''')$ föltétel valamelyik egyenlőségét (természetesen mindegyik index helyére 4-est írva), így Q_3 minden esetre képezhető Q_0', Q_0'' és Q_0''' közül annak a mintájára, amelyikhez tartozó egyenlőség teljesült. Továbbmenve a föltétel egyikének a képezendő Q_3-ra, Q_2-re és Q_1-re is teljesülnie kell; sőt határozottan kimondhatjuk, hogy $(3')$-nek kell teljesülnie, mert, mint a 2. pontban Q_3''-ben és Q_3'''-ben láttuk, egy a $(3'')$, ill. $(3''')$ típusú négyesből már egy lépéssel előrehaladva két egyenlő számot tartalmazó négyes adódik, ezt pedig Q_4-ről nem tehetjük föl. Látni fogjuk, hogy $(3')$ megfelelőjét minden esetben teljesíthetjük a_3, a_2, ill. a_1 alkalmas megválasztásával.

α) Legyen Q_4-ben először $(3')$ mintájára $a_4 + b_4 + c_4 = d_4$. Ekkor $(4')$ mintájára a tetszés szerinti a_3^* egész számból kiindulva képezett

$$Q_3'^* \qquad a_3^* \qquad a_3^* + a_4 \qquad a_3^* + a_4 + b_4 \qquad a_3^* + a_4 + b_4 + c_4$$

négyesben mindenesetre a 4. tag a legnagyobb, csak ez lehet egyenlő a többi három összegével:

$$3a_3^* + 2a_4 + b_4 = a_3^* + a_4 + b_4 + c_4, \quad \text{amiből}$$
$$a_3^* = \frac{c_4 - a_4}{2}.$$

Törtek nélkül számolhatunk, ha Q_4 tagjainak páros voltát felhasználva minden számunk felét a megfelelő nagy betűvel jelöljük (az indexet változatlanul kiírva). Így

$$a_3^* = C_4 - A_4 \quad \text{és}$$

(5)
$$Q_3' \quad a_3 = -A_4 + C_4, \qquad b_3 = A_4 + C_4, \qquad c_3 = A_4 + 2B_4 + C_4,$$
$$d_3 = A_4 + 2B_4 + 3C_4.$$

$a_3 \geq 0$ csak $c_4 \leq a_4$ esetén teljesül, ez azonban – ha nem így volna – elérhető azzal, hogy Q_4 számait c_4-től kezdve és visszafelé haladva vesszük sorba (vagyis a többiek összegével egyenlő d_4 kisebbik szomszédját vesszük a_4-nek).

Ezzel olyan képletcsoportot kaptunk a számnégyes-sorozat visszafelé 1 lépéssel való meghosszabbítására, amelynek eredménye mintegy készen áll egy újabb ilyen meghosszabbításra, hiszen Q_3'-ben ugyanaz a feltétel teljesül, mint Q_4-ben: $a_3 + b_3 + c_3 = d_3$. Eszerint (5)-ben minden indexet 1-gyel csökkentve Q_2'-nek pl. a 3. tagja

$$c_2 = A_3 + 2B_3 + C_3 = \frac{a_3 + c_3}{2} + b_3 = (B_4 + C_4) + (A_4 + C_4) = A_4 + B_4 + 2C_4,$$

és hasonló számításokkal a teljes számnégyes:

(6)
$$Q_2' \quad a_2 = A_4 + B_4, \quad b_2 = B_4 + C_4, \quad c_2 = A_4 + B_4 + 2C_4, \quad d_2 = 2A_4 + 3B_4 + 3C_4.$$

Az indexek csökkentésével Q_3' mintájára képezzük Q_1'-et, abból pedig $(4')$ alapján Q_0'-t (abban ugyanis már nem kell teljesülnie $(3')$-nek). Pl.

$$d_1 = A_2 + 2B_2 + 3C_2 = \frac{1}{2}(a_2 + 2b_2 + 3c_2) = 2A_4 + 3B_4 + 4C_4, \quad \text{és}$$

(7) $Q_1' \quad a_1 = C_4, \qquad b_1 = A_4 + B_4 + C_4, \qquad c_1 = A_4 + 2B_4 + 2C_4, \qquad d_1 = 2A_4 + 3B_4 + 4C_4.$

(8) $Q_0' \quad a_0, \qquad b_0 = a_0 + C_4, \qquad c_0 = a_0 + A_4 + B_4 + 2C_4, \qquad d_0 = a_0 + 2A_4 + 3B_4 + 4C_4,$

ahol a_0 tetszés szerinti egész szám. Pl. a $Q_4 = 6,\ 14,\ 22,\ 42$ négyes kiadódik $Q_0 = a_0, \quad a_0 + 11, \quad a_0 + 32, \quad a_0 + 71$-ből.

β) Ha az előírt Q_4-ben a $(3'')$ típusú $b_4 + c_4 = d_4 + a_4$ feltétel teljesül, akkor a $(4'')$ mintájára képezett

$$N''^* \quad a_3^*, \quad b_3^* = a_3^* - a_4, \quad c_3^* = a_3^* - a_4 + b_4, \quad d_3^* = a_3^* - a_4 + b_4 + c_4$$

számnégyesben (a továbbiakban Q betűk helyett N-eket használunk, így elkerüljük a 2. részbeli jelölések más jelentéssel való megismétlését) d_3^* a legnagyobb szám, ezért a $(3')$ típusú föltétel:

$$a_3^* + b_3^* + c_3^* = d_3^*, \quad \text{innen} \quad a_3^* = (a_4 + c_4)/2 = A_4 + C_4, \quad \text{és az}$$
$$N_3'' \quad a_3 = A_4 + C_4, \quad b_3 = -A_4 + C_4, \quad c_3 = -A_4 + 2B_4 + C_4, \quad d_3 = -A_4 + 2B_4 + 3C_4$$

alkalmas a számnégyes-sorozat visszafelé való újabb meghosszabbítására (itt is elérhető $b_3 \geq 0$). Felírhatjuk mindjárt az N_1'' négyest, ugyanis a (6) képletcsoport alkalmas a sorozat visszafelé 2 lépéssel való olyan meghosszabbítására, amelynek eredménye ismét készen áll újabb meghosszabbításra – hacsak az ottani $c_4 \geq a_4$-nek megfelelően itt $c_3 \geq a_3$, azaz $b_4 \geq a_4$. A számítást részletesen N_1'' második tagjára mutatjuk be; (6)-ot alkalmazzuk az indexek csökkentésével N_3''-ra:

$$b_1 = B_3 + C_3 = \frac{b_3}{2} + \frac{c_3}{2} = \frac{-A_4 + C_4}{2} + \frac{-A_4 + 2B_4 + C_4}{2} = -A_4 + B_4 + C_4,$$

a teljes négyes pedig

$$N_1'' \quad a_1 = C_4, \qquad b_1 = -A_4 + B_4 + C_4, \qquad c_1 = -A_4 + 2B_4 + 2C_4, \qquad d_1 = -2A_4 + 3B_4 + 4C_4$$

Ebből pedig (4′) alapján

$$N_0'' \quad a_0, \quad a_0 + C_4, \quad a_0 - A_4 + B_4 + 2C_4, \quad a_0 - 2A_4 + 3B_4 + 4C_4. \tag{9}$$

Pl. $Q_0 = 6, 8, 12, 14$ kiadódik ebből: $N_0'' = a_0$, $a_0 + 6$, $a_0 + 13$, $a_0 + 30$.

γ) Végül ha Q_4-ben $(3''')$-nek megfelelően $a_4 + c_4 = b_4 + d_4$, és itt $a_4 \leq c_4$, továbbá $a_3 \leq c_3$, azaz $a_4 \geq b_4$, akkor a β) esethez hasonlóan $(4''')$, $(3')$, (6),végül $(4')$ fölhasználásával

$$\begin{array}{lllll} N_3''' & -A_4 + C_4, & A_4 + C_4, & A_4 - 2B_4 + C_4, & A_4 - 2B_4 + 3C_4; \\ N_1''' & C_4, & A_4 - B_4 + C_4 (= D_4), & A_4 - 2B_4 + 2C_4, & 2A_4 - 3B_4 + 4C_4; \\ N_0''' & a_0, & a_0 + C_4, & a_0 + A_4 - B_4 + 2C_4, & a_0 + 2A_4 - 3B_4 + 4C_4. \end{array} \tag{10}$$

Pl. $Q_4 = 12, 6, 14, 20$ kiadódik az $N_0''' = a_0, \quad a_0 + 7, \quad a_0 + 17, \quad a_0 + 31$ számnégyesből.

4. Eddigi eredményeink alapján gyorsan megkaphatjuk egy a $Q_{16} = 32, 32, 32, 32$ négyesre vezető számnégyes-sorozat Q_0 kezdő számnégyesét, pl. az alábbi lépésekben. Q_{16}-ban teljesül a $(3''')$ típusú követelmény, ebből (10) alapján képezzük Q_{12}-t, és úgy határozzuk meg a_{12}-t, hogy teljesüljön $(3')$:

$$Q_{12} \qquad a_{12}, \qquad a_{12} + 16, \qquad a_0 + 32, \qquad a_{12} + 48; \qquad a_{12} = 0$$

(megengedett érték). Innen egymás után (7), (7), (6), végül (8) alkalmazásával, $a_0 = 0$ választásával

$$Q_9: \ 16, \ 24, \ 48, \ 88; \qquad Q_6: \ 24, \ 44, \ 80, \ 148; \qquad Q_4: \ 34, \ 62, \ 114, \ 210; \qquad Q_0 = 0, \ 57, \ 162, \ 355.$$

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)

Megjegyzés. A fentiek azt is adták, hogy lehet képezni olyan számnégyest, amelyből kiindulva tetszés szerint előírt számú lépésben kapjuk először a 0, 0, 0, 0 számnégyest (Q_0 esetében 17 lépés). Ugyanis Q_0 számait $a_0 = 68$-cal emelve tovább hosszabbítható visszafelé, és bár így törtek lépnek föl, ezek nevezőjének legkisebb közös többszörösével szorozva egész számnégyest kapunk. (Nevezőként csak 2-nek pozitív egész kitevős hatványai lépnek fel.)

Ez a meggondolás viszont azt is adja, hogy egész számokhoz ragaszkodva a sorozat mindig véges számú számnégyesből áll. (Számnégyesek helyett számhármasokat véve, a sorozat lehet végtelen hosszú is, pl. a 0, 1, 1 számhármast a 3. lépésben, a 0, 0, 0, 1, 1 számötöst a 15. lépésben visszakapjuk.)