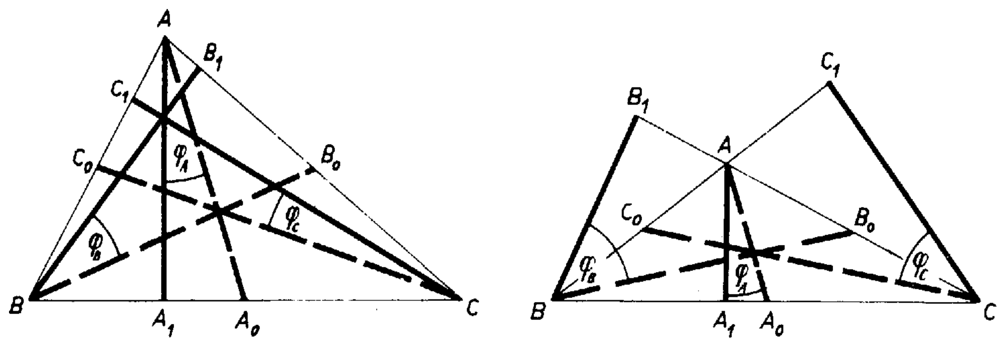
Legyen a $BC$, $CA$, $AB$ oldal felezőpontja rendre $A_0$, $B_0$, $C_0$ és az $A$, $B$, $C$-ből húzott magasság talppontja rendre $A_1$, $B_1$, $C_1$. Ekkor a bizonyítandó állítás így írható:

$$\frac{A_1A_0}{A_1A}+\frac{C_1C_0}{C_1C}-\frac{B_1B_0}{B_1B}=0. \tag{1}$$




Egyenlő szárú háromszögre $b$ egyenlő $a$-val vagy $c$-vel, így $\varphi_B$ is $\varphi_A$-val vagy $\varphi_C$-vel, és a másik 0; tehát az állítás igaz. A továbbiakban feltesszük, hogy $a>b>c$, és így $\alpha>\beta>\gamma$. A pontok sorrendje a $BC$ oldalon $B$-től $C$ felé $A_1$, $A_0$, – mert a $BC$-re $A_0$-ban emelt merőlegesnek $A$ azon az oldalán van, mint $B$ –, a $CA$ oldalegyenesen $C$, $B_0$, $B_1$, a $BA$ oldalegyenesen $B$, $C_0$, $C_1$. Az utóbbi két oldalegyenesen az $A$ csúcs $\alpha<90^\circ$ esetén a magasságtalppont után következik, $\alpha>90^\circ$ esetén közvetlenül előtte, $\alpha=90^\circ$ esetén pedig egybeesik vele.

$\alpha<90^\circ$ esetén az $ABB_1$ és $ACC_1$ hasonló derékszögű háromszögekből

$$(\mathrm{ctg}\alpha=)\quad \frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C},\quad \text{azaz}\quad \frac{AB_0-B_1B_0}{B_1B}=\frac{AC_0-C_1C_0}{C_1C}. \tag{2}$$

Az átalakítás $\alpha\geqq 90^\circ$ esetén is érvényes, ha az $AC$, ill. $AB$ egyenesen irányítást vezetünk be, és pozitívnak vesszük az $A$-tól $C$, ill. $B$ felé mutató irányt. Hasonlóan a $BCC_1$ és $BAA_1$, valamint a $CAA_1$ és $CBB_1$ hasonló háromszögpárokból

$$(\mathrm{ctg}\,\beta=)\quad \frac{BC_1}{C_1C}=\frac{BA_1}{A_1A},\quad \text{azaz}\quad \frac{BC_0+C_0C_1}{C_1C}=\frac{BA_0-A_1A_0}{A_1A}, \tag{3}$$

$$(\mathrm{ctg}\,\gamma=)\quad \frac{CA_1}{A_1A}=\frac{CB_1}{B_1B},\quad \text{azaz}\quad \frac{CA_0+A_0A_1}{A_1A}=\frac{CB_0+B_0B_1}{B_1B}. \tag{4}$$

Most már (2)–(4) átalakításaiban a bal és a jobb oldalakat összeadva a kapott egyenlőségből $AB_0=B_0C$, $BC_0=C_0A$ és $CA_0=A_0B$ figyelembevételével és rendezéssel (1)-et kapjuk.

*Bojtár János* (Budapest, Lékai J. 12. évf. isk. IV. g. o. t.)