Jelöljük (1) és (2) jobb oldalát A-val, ill. B-vel, távolítsuk el a nevezőket és gyűjtsük egy oldalra az y-t tartalmazó tagokat:

$$(Ax-1)y = A-x, \qquad (1-Bx)y = B-x. \tag{3}$$

Az első jobb oldal $1-Bx$-szerese a másodiknak $Ax-1$-szeresével egyenlő. Az így adódó egyenletet a következő alakra rendezhetjük:

$$(A+B)x^2 - 2(1+AB)x + A + B = 0. \tag{4}$$

Innen, amennyiben $A+B \neq 0$, az egyenletet kielégítő x csak

$$x = \left\{AB + 1 \pm \sqrt{(1+AB)^2 - (A+B)^2}\right\}/(A+B)$$

lehet. A diszkriminánst átalakítva és az eredeti paraméterekkel kifejezve:

$$\begin{aligned}(1+AB)^2 - (A+B)^2 &= (1-A^2)(1-B^2) = \\ &= (1+A)(1-A)(1+B)(1-B) = \\ &= \frac{(1+a)^2}{1+a^2} \cdot \frac{(1-a)^2}{1+a^2} \cdot \frac{(1+b)^2}{1+b^2} \cdot \frac{(1-b)^2}{1+b^2} = \left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right),\end{aligned}$$

tehát mindig valós megoldást kapunk. Mivel még

$$A+B = \frac{2(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}, \tag{5}$$

azért az egyenlet egyik gyöke, ha $A+B \neq 0$ (azaz $a+b \neq 0$, $ab \neq -1$)

$$x_1 = \frac{4ab + (1+a^2)(1+b^2) + (1-a^2)(1-b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} : \frac{2(a+b)(ab+1)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{ab+1}{a+b}.$$

Mivel (4)-ben az első és utolsó együttható egyenlő, s így $x_1x_2 = 1$, azért $x_2 = 1/x_1$. Most már y-t pl. (3) első egyenletéből számíthatjuk, ha $Ax_1 \neq 1$:

$$y_1 = \frac{A-x_1}{Ax_1-1} = \frac{2a(a+b)-(ab+1)(1+a^2)}{2a(ab+1)-(1+a^2)(a+b)} = \frac{(a^2-1)(ab-1)}{(a^2-1)(a-b)} = \frac{ab-1}{a-b},$$

$$y_2 = \frac{A-1/x_1}{A/x_1-1} = \frac{Ax_1-1}{A-x_1} = \frac{1}{y_1}.$$

Összefüggéseink arra az esetre érvényesek, ha $a \neq b$ és $a^2 \neq 1$, továbbá ha $y_1 \neq 0$. Ha $Ax_1 = 1$, de $Bx_1 \neq 1$, akkor (3) második egyenletéből ugyanezen y-értékek adódnak, feltéve, hogy $a \neq b$ és $b^2 \neq 1$. Ax_1 és Bx_1 csak akkor lesz egyszerre 1, ha $A = B$, azaz, mivel

$$A-B = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}, \tag{6}$$

tehát ha $a = b$ vagy $ab = 1$. Mint látjuk, ezekben az esetekben fenn is áll mindig $A = B$.

Azt nyertük tehát, hogy ha $A+B \neq 0$ és $A-B \neq 0$, továbbá a^2 és b^2 egyike nem 1, akkor csak a fenti x_1; y_1 és x_2, y_2 lehet az egyenletrendszer megoldása. (Az (5) és (6) alapján x_1 és y_1 nem 0, és így x_2, y_2 létezik.) Behelyettesítve (1) és (2)-be, mivel

$$x_1 - y_1 = \frac{2a(1-b^2)}{a^2-b^2}, \quad 1 - x_1y_1 = \frac{(1+a^2)(1-b^2)}{a^2-b^2},$$

$$x_1 + y_1 = \frac{2b(a^2-1)}{a^2-b^2}, \quad 1 + x_1y_1 = \frac{(1+b^2)(a^2-1)}{a^2-b^2},$$

azért x_1, y_1 megoldása az egyenletrendszernek, ha sem a^2, sem b^2 nem 1. Mivel továbbá

$$\frac{x_2-y_2}{1-x_2y_2} = \frac{1/x_1 - 1/y_1}{1-1/x_1y_1} = \frac{y_1-x_1}{x_1y_1-1} \quad \text{és}$$

$$\frac{x_2+y_2}{1+x_2y_2} = \frac{1/x_1 + 1/y_1}{1+1/x_1y_1} = \frac{y_1+x_1}{x_1y_1+1},$$

így a fenti feltételek mellett x_2, y_2 is megoldás.

A kivételes esetek vizsgálatára jól használhatók a (3) alatti egyenletek összeadásával és kivonásával keletkező egyenletek:

$$(7) \qquad 2x = A + B - (A - B)xy, \qquad 2y = (A + B)xy - (A - B).$$

Ha $A + B = 0$, akkor innen $y = -A$, $x = A^2x$; tehát ha $A^2 \neq 1$, $x = 0$; – ha pedig $A^2 = 1$, akkor x tetszés szerinti szám lehet, amire $xy \neq \pm 1$, tehát x nem lehet ± 1. Ezek az értékpárok ki is elégítik az egyenletrendszert.

Hasonlóan ha $A - B = 0$, akkor $x = A$, és ha $A \neq 1$, $y = 0$; – ha pedig $A^2 = 1$, y bármely ± 1-től különböző szám lehet, és ezek ismét megoldását szolgáltatják az egyenletrendszernek.

Vizsgáljuk még az $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ feltételeket. Ha pl. $a^2 = 1$, akkor $A = a = \pm 1$.

A hátra levő esetekben, amikor sem $A + B$, sem $A - B$ nem 0, nem lehet $a^2 = b^2 = 1$, mert ebből az éppen mondottak szerint $A + B = 0$ vagy $A - B = 0$ következik.

Legyen most $a^2 = 1$, $b^2 \neq 1$. Mivel most csak a fent nyert x_1, y_1 és x_2, y_2 értékpár lehet az egyenletrendszer megoldása, így

$$x_1 = \frac{ab + 1}{a + b} = \frac{a(ab + 1)}{1 + ab} = a$$

(a törtnek van értelme, mivel $a^2b^2 = b^2 \neq 1$) és

$$y_1 = \frac{ab - 1}{a - b} = \frac{a(ab - 1)}{1 - ab} = -a,$$

továbbá $x_2 = a$, $y_2 = -a$, mert $a^2 = 1$. Ebből $x_1 + y_1 = 1 + x_1y_1 = x_2 + y_2 = 1 + x_2y_2 = 0$, s így a (2) egyenlet bal oldala értelmetlenné válik. Ebben az esetben tehát nincs megoldása az egyenletrendszernek. Ugyanígy az $a^2 \neq 1$, $b^2 = 1$ esetben sem, mert akkor $x_1 = b = x_2 = y_1 = y_2$, s így az (1) egyenlet bal oldala válik értelmetlenné.

Végül, mikor lesz az x_1, y_1 és x_2, y_2 megoldáspár azonos? Mivel

$$x_1 - x_2 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{(ab + 1)^2 - (a + b)^2}{(ab + 1)(a + b)} = \frac{(a + 1)(b + 1)(a - 1)(b - 1)}{(ab + 1)(a + b)},$$

tehát ez csak akkor következhet be, ha a és b közül az egyik 1 vagy -1. Ez azonban a kivételes esetek közé tartozik. Ha a és b másika is 1 vagy -1, akkor vagy $A + B = 0$, vagy $A - B = 0$; ha a másik nem 1 vagy -1, akkor pedig nincs megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel $1 \pm A = (1 \pm a)^2/(1 + a^2)$, s így A, ill. B akkor és csak akkor ± 1, ha a, ill. b értéke ugyanennyi, így (5)-öt és (6)-ot is figyelembe véve eredményeink így foglalhatók össze: ha a különbözik $\pm b$-től és $\pm 1/b$-től, és mindkettő különbözik ± 1-től, akkor az egyenletrendszernek két különböző megoldása van: a fenti x_1, y_1 és x_2, y_2 értékpár.

Ha a és b egyike ± 1, a másik ettől különböző érték, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha a egyenlő b-vel, vagy a reciprokával, de ± 1-től különböző, akkor $x = 2a/(1 + a^2)$, $y = 0$; ha a egyenlő b-vel vagy $-1/b$-vel, de nem ± 1, akkor $x = 0$, $y = 2b/(1 + b^2)$.

Ha $a = b = \pm 1$, akkor $x = a$, y bármely ± 1-től különböző szám lehet, ha pedig $a = -b = \pm 1$, akkor x tetszőleges szám, csak nem ± 1, és $y = -a$.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)