I. megoldás. Minden az állításban szereplő szám pozitív, ezért (1) akkor és csak akkor teljesül, ha a hatványozással és osztással keletkező következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\frac{n^n(n+1)^{2n}}{4^n(n!)^3} \geqq 1. \tag{2}$$

Számítsuk ki a (2) bal oldalán álló T_n törtet n első néhány értékére: $T_1 = 1$, $T_2 = 81/32 > 2$, $T_3 = 8$,

$$T_4 = \frac{5^8}{3^3 \cdot 8^3} = \left(\frac{5^2}{3 \cdot 8}\right)^3 \cdot 5^2 > 25, \qquad T_5 = \frac{5^2 \cdot 3^7}{2^9} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3 \cdot 3 \cdot 5^2 > 75.$$

Ezek tagról tagra növekednek. Nézzük meg, fennáll-e ez továbbra is: számítsuk ki tetszés szerinti két egymás utáni tört hányadosát:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{2(n+1)}}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^3} : \frac{n^n(n+1)^{2n}}{4^n(n!)^3} =$$
$$= \frac{(n+2)^{2(n+1)}(n!)^3}{4(n+1)^{n-1}n^n\big(n!(n+1)\big)^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{n^2+n}\right)^n.$$

Itt a második tényező 1-nél nagyobb; a harmadikról megmutatjuk, hogy nagyobb mint 4. Ehhez alakítsuk át ezt a tényezőt a következőképpen:

$$\left(\frac{n^2+4n+4}{n^2+n}\right)^n = \left(1 + \frac{3n+4}{n^2+n}\right)^n > \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

Az utolsó n-edik hatványt gondoljuk kiírva, mint n tényező szorzatát. Ha mindegyik tényezőből az első tagot választjuk ki és ezeket szorozzuk össze, 1-et kapunk. Ha egy tényezőből a második tagot választjuk, az összes többiből az elsőt, akkor a szorzat keletkező tagja $3/n$ lesz. A második tagot választhatjuk vagy az első, vagy a második, s.i.t., vagy az n-edik tényezőből, így n olyan tagot kapunk, amelyiknek az értéke $3/n$. A szorzat további tagjai pozitívok, ha tehát ezeket mind elhagyjuk, azzal a szorzatot kisebbítjük. Így ha $n > 1$

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n > 1 + \frac{3}{n} \cdot n = 4.$$

Ezzel beláttuk, hogy $T_{n+1}/T_n > 1$, azaz $T_n < T_{n+1}$. Így

$$1 = T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_n < \ldots,$$

tehát a feladat állítása is helyes.

Ferenczi Miklós (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
Huhn András (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A fenti megoldásban lényegében a következő *Bernoulli*-féle egyenlőtlenséget bizonyítottuk be és használtuk fel: ha h pozitív, n pedig pozitív egész szám, akkor

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh.$$

(Itt egyenlőség csak $n = 1$-re áll fenn.) Ezt a fentinél kissé ügyesebben alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} >$$
$$> \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1 + n \cdot \frac{2}{n}\right)\left(1 + (n+1)\frac{1}{n+1}\right) > \frac{3}{2}.$$

Mivel még $T_2 = 81/32 > (3/2)^2$, ebből teljes indukcióval könnyen adódik, hogy $T_n > (3/2)^n$, ha $n \geqq 2$, vagyis az 1-nél nagyobb n értékekre

$$\sqrt[n]{(n!)^3} < \frac{n(n+1)^2}{6}.$$

II. megoldás. Az állítás így alakítható:

$$\sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^3 \cdot n^3} \leqq \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

A jobb oldal második tényezője egyenlő az első n természetes szám köbének összegével, így a jobb oldal e köbszámok számtani közepével egyenlő. A bal oldal viszont ugyanezen számok mértani közepe, ezért a pozitív számok mértani és számtani közepe közti ismert egyenlőtlenség alapján $n \geqq 2$ esetén kisebb a jobb oldalnál, $n = 1$ esetén pedig a két oldal egyenlő, tehát az állítás igaz.

Szántó Ottó (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)