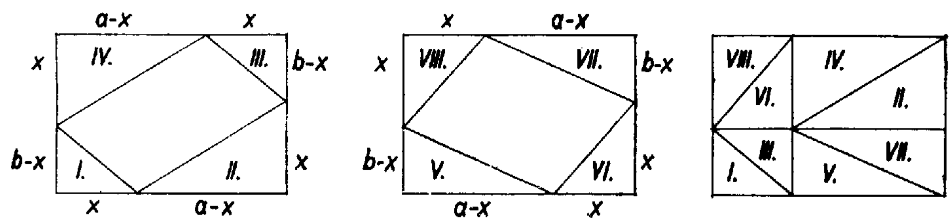
I. Legyenek a téglalap oldalai a és b, ahol $a \geqq b$ (> 0), az oldalakra felmért szakasz hossza x, így a keletkezett négyszögek területét mint x függvényét a

$$0 < x \leqq b \tag{1}$$

intervallumban kell vizsgálnunk. A felmért szakaszok végpontjait az oldalak sorrendjében összekötve, a téglalapról derékszögű háromszögeket vágunk le, közülük mindkét mód esetében $2-2$ egybevágó (az ábra α, ill. β része). A területek x-nek másodfokú függvényei, mindjárt teljes négyzetté kiegészítéssel

$$\begin{aligned} t_1 &= ab - x(b-x) - (a-x)x = 2x^2 - (a+b)x + ab = \\ &= 2\left(x - \frac{a+b}{4}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{4}\right)^2, \\ t_2 &= ab - (a-x)(b-x) - x^2 = -2x^2 + (a+b)x = \\ &= -2\left(x - \frac{a+b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{4}\right)^2. \end{aligned}$$



α) β) γ)

Vegyük észre mindjárt, hogy $t_1 + t_2 = ab$, azaz a két idom területének összege egyenlő az adott téglalap területével, egyikük növekedésével a másik csökken, így a két kérdésre a választ egy csapásra adhatjuk meg. (Másrészt a lemez feldarabolási tervét mindkét módon elkészítve a levágott 8 háromszög együttes területe is ab, ezt mutatja be átdarabolással az ábra γ része.)

t_1-nek az x-től függő tagja nem negatív, így legkisebb értékét akkor veszi fel, ha ez a tag 0, vagyis

$$x_0 = \frac{a+b}{4} \quad \text{esetén} \quad t_{1\,\min} = ab - \left(\frac{a+b}{4}\right)^2,$$

amennyiben x_0 a mondott intervallumba esik, vagyis ha

$$\frac{a+b}{4} \leqq b, \qquad b \geqq \frac{a}{3}, \tag{2}$$

egyelőre ezt az esetet tekintjük. A fentiek szerint ugyanezen feltételek mellett

$$t_{2\,\max} = \left(\frac{a+b}{4}\right)^2.$$

(t_1-től függetlenül is látható, hogy így t_2 változó tagja 0, különben pedig negatív.) Ha $a = b$, akkor $x_0 = a/2$.

x-et x_0-tól akár lefelé, akár fölfelé távolítva t_1 növekszik, és legnagyobb értékét ott veszi fel, ahol az $|x - x_0|$ eltérés a legnagyobb. Lefelé nagyobb távolságra távolodhatunk x_0-tól, mint fölfelé, ugyanis az x_0-lal kettévágott (1) intervallum első és második része hosszainak különbsége

$$(x_0 - 0) - (b - x_0) = 2x_0 - b = \frac{a-b}{2} \geqq 0.$$

Eszerint t_1 legnagyobb (és t_2 legkisebb) értéke $x = 0$-nál adódnék: $t_1 = ab$, ill. $t_2 = 0$ (t_2 elfajul az átlószakasszá), az $x = 0$ értéket viszont (1)-ben kizártuk. Eszerint a (2) esetben t_1 nem vesz fel legnagyobb és t_2 nem vesz fel legkisebb értéket.

$b < a/3$, $\quad a > 3b$ esetén a t_1-et minden x-re ábrázoló parabola alul elhelyezkedő csúcsának (és a t_2-t ábrázoló parabola fönt elhelyezkedő csúcsának közös) x_0 abszcisszája jobbra esik az (1) intervallumtól, mert

$$x_0 = \frac{a+b}{4} > \frac{3b+b}{4} = b.$$

Ezért t_1-et (1)-ben a parabola süllyedő ágának egy íve ábrázolja, így t_1 az (1) jobb végpontjában veszi fel legkisebb értékét:

$$x = b \quad \text{esetén} \quad t'_{1\,\min} = b^2, \quad \text{és} \quad t'_{2\,\max} = ab - b^2,$$

másrészt t_1 ugyanúgy nem vesz fel legnagyobb értéket és t_2 sem vesz fel legkisebbet, mint az előbbi esetben.

II. A $t_1 = t_2$ követelmény a fentiek szerint akkor teljesül, ha

$$4x^2 - 2(a+b)x + ab = 0, \quad \text{vagyis ha} \quad x_1 = a/2, \quad x_2 = b/2.$$

Az utóbbi érték mindig felmérhető a lemezre, az előbbi csak $a/2 \leqq b$, azaz $b \leqq a \leqq 2\ b$ esetén. Mindkét esetben a két mód szerinti felmérés nemcsak egyenlő területű, hanem egyszersmind egybevágó négyszögekre vezet.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)