I. megoldás. Fejezzük ki a bal oldali K kifejezés utolsó tagját a

$$\operatorname{ctg} 2v = \frac{1}{\operatorname{tg} 2v} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 v}{2\operatorname{tg} v}$$

azonosság alkalmazásával a fele akkora szög függvénye gyanánt, majd az adódó összevonások után hasonlóan haladjunk tovább. A kifejezés az alábbiak szerint egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
K &= \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + \frac{8}{\operatorname{tg} 8x} = \\
&= \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + \frac{4(1-\operatorname{tg}^2 4x)}{\operatorname{tg} 4x} = \\
&= \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + \frac{4}{\operatorname{tg} 4x} = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + \frac{2(1-\operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg} 2x} = \\
&= \operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} x + \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x,
\end{aligned}$$

eszerint a két oldal valóban azonos.

Ferenczi Miklós (Budapest, Eötvös J. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Az azonosság természetesen az olyan helyek kivételével érvényes, ahol valamelyik tagja nincs értelmezve.

II. megoldás. Képezzük a jobb és a bal oldal különbségét, majd alkalmazzuk a

$$\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg} y} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2y} = 2\operatorname{ctg} 2y$$

azonosságot. A különbség:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x - 8\operatorname{ctg} 8x = \\
&= 2(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x) - 4\operatorname{tg} 4x - 8\operatorname{ctg} 8x = \\
&= 4(\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg} 4x) - 8\operatorname{ctg} 8x = 0,
\end{aligned}$$

ezzel az azonosságot bebizonyítottuk.

Lakatos Aladár (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. G. III. o. t.)

Megjegyzés. Az eljárás folytatásával a következő azonosságot kapjuk:

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg} 2^{n-1}x + 2^n \operatorname{ctg} 2^n x = \operatorname{ctg} x$$

.

Mátrai Miklós (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn. III. o. t.)