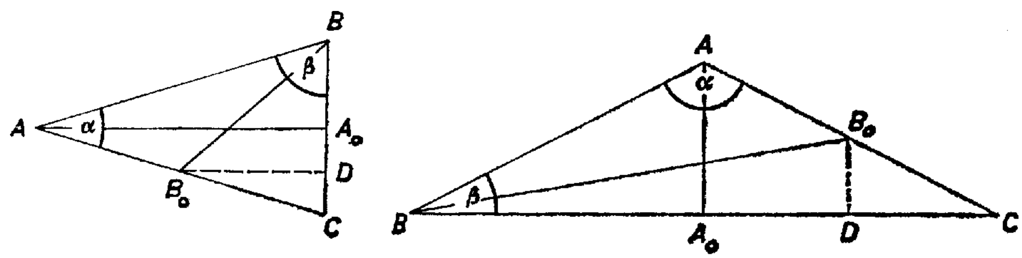
I. Legyen az ABC háromszögben $AB = AC = 1$, $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, az alap és az AC szár felezőpontja A_0, ill. B_0, és az utóbbi vetülete BC-n D. Ekkor $BC = 2\cos\beta$, $AA_0 = s_a$ azonos az A-ból húzott magassággal: $s_a = \sin\beta$, másrészt a BB_0D derékszögű háromszögben $BD = 3BC/4$, $B_0D = s_a/2$, így

$$2s_b = \sqrt{9\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \sqrt{1 + 8\cos^2\beta} = \sqrt{5 + 4\cos 2\beta},$$
$$S = s_a + 2s_b = \sin\beta + \sqrt{5 + 4\cos 2\beta},$$

másrészt a háromszög kerülete $2s = a + b + c = 2(1 + \cos\beta)$.

$\alpha = 8^\circ$ esetén $\beta = 86^\circ$, $S \approx 2{,}036$, $2s \approx 2{,}140$, így a keresett arány $(2s - S) : 2s \approx 0{,}0574 \approx 1/17{,}5$, vagyis S a felső korlátnak közelítőleg a 17-ed részével marad alatta.

$\beta = 8^\circ$ esetén $S \approx 3{,}113$, az alsó korlát $3s/2 \approx 2{,}985$, a keresett arány $(S - 3s/2) : (3s/2) \approx 0{,}0428 \approx 1/23$, vagyis S az alsó korlátot annak kb. 23-ad részével haladja meg.



II. A keresett első egyenlő szárú háromszög-alak céljára megfelel minden olyan β hegyesszög, amellyel szerkesztett háromszögben S nagyobb a kerület 29/30 részénél, vagy éppen egyenlő vele, azaz

$$\sin\beta + \sqrt{1 + 8\cos^2\beta} \ge \frac{29}{15}(1 + \cos\beta). \tag{1}$$

A bal oldal első tagja AA_0, nagyobb az AB és BA_0 oldalak különbségénél, ami $1 - \cos\beta$, második tagja pedig nagyobb 1-nél, tehát a bal oldal nagyobb, mint $2 - \cos\beta$. Ha találunk olyan β hegyesszöget, amely mellett ez a kifejezés nagyobb (1) jobb oldalánál, vagy egyenlő vele, arra (1) is teljesül. Mármost

$$2 - \cos\beta \ge \frac{29}{15}(1 + \cos\beta)$$

teljesül, ha $\cos\beta \le 1/44$, azaz ha $\beta \ge 88{,}7^\circ$. Például $\beta = 89^\circ$, $\alpha = 2^\circ$ esetén – a táblázati értékek kikeresésekor a tagok alsó közelítő értékét felhasználva –

$$S = \sin 89^\circ + \sqrt{5 + 4\cos 178^\circ} > 0{,}9997 + \sqrt{5 - 4 \cdot 0{,}9995} >$$
$$> 0{,}9997 + 1{,}0009 = 2{,}0006,$$

másrészt felkerekítéssel

$$2s = 2(1 + \cos 89^\circ) < 2 \cdot 1{,}0176 = 2{,}0352,$$

így eltérésük kisebb mint 0,0346, ami maga is kisebb, mint a felső korlát 1/50 része.

A keresett második alak céljára megfelel minden olyan β hegyesszög, amellyel szerkesztett háromszögben S kisebb az alsó korlát 31/30-szorosánál, vagy egyenlő vele, vagyis (a négyzetgyök újabb átalakításával)

$$S = \sin\beta + \sqrt{9 - 8\sin^2\beta} \le \frac{31}{30} \cdot \frac{3}{2}(1 + \cos\beta). \tag{2}$$

A bal oldal kisebb, mint $\sin\beta + 3$, a jobb oldalon $\cos\beta = BA_0 > BA - AA_0 = 1 - \sin\beta$. Ha (2)-be ezeket beírva, a kapott egyenlőtlenséget valamely β hegyesszög teljesíti, arra (2) is teljesül. Mármost

$$\sin\beta + 3 \le \frac{31}{20}(2 - \sin\beta)$$

teljesül, ha $\sin\beta \le 2/51$, ehhez pedig elegendő, ha $\beta \le 2{,}2^\circ$. Például $\beta = 2^\circ$, $\alpha = 176^\circ$ esetén felkerekítésekkel $S = \sin 2^\circ + \sqrt{5 + 4\cos 4^\circ} < 0{,}0350 + \sqrt{5 + 4 \cdot 0{,}9977} < 0{,}0350 + 2{,}9985 = 3{,}0335$,
és lekerekítéssel

$$3s/2 = 3(1 + \cos 2^\circ)/2 > 3 \cdot 1{,}9993/2 > 2{,}9989,$$

így eltérésük kisebb, mint 0,0346, ami maga is kisebb, mint az alsó korlát 1/80 része.

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. gyak. g.)

Megjegyzés. A II. részben látott eljárásoktól kissé eltérően kapunk megfelelő háromszög-alakokat a következő meggondolásokkal. Legyen a háromszög alapja $2x$. Az első esetben a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával

$$S > s_a + 2 \cdot B_0D = 2s_a > 2(AB - BA_0) = 2(1 - x),$$

így

$$\frac{S}{2s} > \frac{1-x}{1+x} \geq \frac{29}{30}$$

teljesül, mihelyt $x \leq 1/59$, azaz $\cos\beta \leq 0{,}0169$, $\beta \geq 89{,}1°$. (A kapott korlát azért szűkebb, mert fent $2s_b$ helyére 1-et írtunk.)

A második esetben

$$S = s_a + 2s_b < s_a + 2(BD + DB_0) = 2s_a + 3x,$$

és megfelel egy háromszög-alak, ha ezt az alsó korlátnál 31/30-szor nagyobb számból kivonva nem negatív számot kapunk:

$$\frac{31}{30} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2(1 + x) - (2s_a + 3x) = \frac{1}{20}(31 - 40s_a - 29x) \geq 0.$$

A zárójel harmadik tagjában $x = BA_0$ helyére a nagyobb $BA = 1$-et írva a különbség helyére kisebb szám lép, de még az is pozitívvá tehető, mégpedig $2 - 40s_a \geq 0$, ha $s_a \leq 1/20$, azaz $\sin\beta \leq 0{,}05$, $\beta \leq 2{,}8°$.