I. A sorozat 1–3 indexű tagjai így írhatók:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}(2^2 - 1^2),$$
$$a_2 = 1 - \frac{1}{3^2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{3^2}(3^2 - 2^2 + 1^2),$$
$$a_3 = 1 - \frac{1}{4^2}(3^2 - 2^2 + 1^2) = \frac{1}{4^2}(4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2).$$

Ezek alapján a_n kifejezésére a következőt sejtjük:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}[(n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 - (n-2)^2 + \ldots + \\ +(-1)^n \cdot 2^2 + (-1)^{n+1} \cdot 1^2],$$

vagyis a zárójelben a négyzetszámok állanak fordított sorrendben, $(n+1)^2$-től 1^2-ig, minden másodikuk kivonandó gyanánt.

A szögletes zárójelbeli egymás utáni tagokat párosával szorzattá alakítva mindegyik pár egyenlő az alapok összegével, mert az alapok különbsége mindig 1; a kifejezés eleje így alakul:

$$[(n+1) + n] + [(n-1) + (n-2)] + \ldots,$$

vége pedig páros, ill. páratlan n esetére

$$\ldots + (3+2) + 1^2, \qquad \text{ill.} \qquad \ldots + (2+1),$$

vagyis a kifejezés mindenképpen az $n+1$-től 1-ig terjedő egész számok összege. Így

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}, \tag{3}$$

vagyis sejtésünk szerint bármelyik tagot úgy számítjuk ki a sorszámából, hogy a 2-vel és 1-gyel nagyobb számok hányadosát osztjuk 2-vel.

Könnyen belátható, hogy ez $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ esetére megegyezik a tagok kijelölt alakjából adódó számmal. Megmutatjuk, hogy ha (3) érvényes az n indexre, akkor érvényes a rá következő $n+1$-re is. Valóban (1) szerint

$$a_{n+1} = 1 - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 a_n = 1 - \frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{n+3}{2(n+2)}, \tag{4}$$

megfelelően a szóban kimondott képezési szabálynak.

II. Ezek szerint a (2) alatti, $n+1$ tényezőből álló szorzat számlálójában az egész számok szorzata áll 2-től $n+2$-ig bezárólag, nevezőjében pedig 2^{n+1}, szorozva az 1-től $n+1$-ig terjedő egész számok szorzatával. Így egyszerűsítéssel

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{n+2}{2^{n+1}}. \tag{5}$$

Valóban (4) szerint

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{n+3}{2^{n+2}},$$

és ez ugyanúgy áll elő $n+1$-ből, mint (5) az n-ből.

Lux Iván (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A kezdő tagokat kiszámítva:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{5}{8}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{7}{12}.$$

Az egymás utáni tagokban mind a számlálók, mind a nevezők váltakozva növekedést és fogyást mutatnak. A páros indexű, csökkenést mutató nevezők páratlanok, ezeket a tagokat 2-vel bővített

$$a_0 = \frac{2}{2}, \quad a_2 = \frac{4}{6}, \quad a_4 = \frac{6}{10}$$

alakban írva a fenti sorozatba, megmutatkozik a (3) szabályszerűség.

Márki László (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)