A kifejezés nincs értelmezve, ha $u(u-2v)<0$,

$$\text{tehát vagy ha } u>0,\ u-2v<0,\ \text{azaz } 2v>u>0,$$
$$\text{vagy ha } u<0,\ u-2v>0,\ \text{azaz } 2v<u<0.$$

Máskor

$$\begin{aligned}
&u^2-2uv+3v^2+2v\sqrt{3u(u-2v)}=\\
=&u(u-2v)+2\sqrt{3}v\sqrt{u(u-2v)}+(\sqrt{3}v)^2=\\
=&\big(\sqrt{u(u-2v)}+\sqrt{3}v\big)^2
\end{aligned}$$

tehát a külső gyökjel alatt nem áll negatív szám: a keresett gyökmennyiség pedig megegyezik

$$|\sqrt{u(u-2)}+\sqrt{3}v|\text{-vel.}$$

Itt az abszolút érték jele elhagyható, kivéve ha v negatív és

$$-\sqrt{3}v=\sqrt{3}\cdot|v|>\sqrt{u(u-2v)}.$$

Mivel mindkét oldalon pozitív szám áll, ez ugyanakkor teljesül, amikor a négyzetre emeléssel keletkező

$$3v^2>u(u-2v),\qquad 4v^2>u^2-2uv+v^2=(u-v)^2$$

egyenlőtlenség. Ez viszont akkor teljesül, ha

$$|u-v|<2|v|=-2v,$$

azaz ha

$$2v<u-v<-2v,\qquad 3v<u<-v.$$

Ebből $u<0$ esetén a $2v<u$ esetben a kifejezés nincs értelmezve, tehát csak a

$$3v<u\le 2v,\qquad 0\le u<-v$$

esetek maradnak. Ezek szerint

$$\sqrt{u^2-2uv+3v^2+2v\sqrt{3u(u-2v)}}=$$
$$=\begin{cases}\sqrt{u(u-2v)}+\sqrt{3}v, \quad \text{ha} \quad 0\le v\le \dfrac{u}{2},\ \text{vagy } u\le 0\le v,\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{vagy } u\le 3v<0,\ \text{vagy } 0<-v\le u;\\
-\sqrt{3}v-\sqrt{u(u-2)}=\sqrt{3}|v|-\sqrt{u(u+2|v|)},\\
\qquad\qquad \text{ha } v<0 \text{ és } 3v<u\le 2v<0,\ \text{vagy } 0\le u<-v;\\
\text{nincs értelme, ha } 0<u<2v \text{ vagy } 2v<u<0.\end{cases}$$

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A puszta átalakításhoz eljutunk az

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

azonossággal is. A bal oldal akkor azonos (1)-gyel, ha

$$A=u^2-2uv+3v^2=u(u-2v)+3v^2,\qquad B=12uv^2(u-2v).$$

Ezekkel a jobb oldal belső gyökjele egyszerűen alakul:

$$\begin{aligned}A^2-B&=u^2(u-2v)^2-6uv^2(u-2v)+9v^4=\\&=[u(u-2v)-3v^2]^2,\end{aligned}$$

vagyis az A utóbbi alakjában szereplő tagok különbségének négyzete.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. g. III. o. t.)