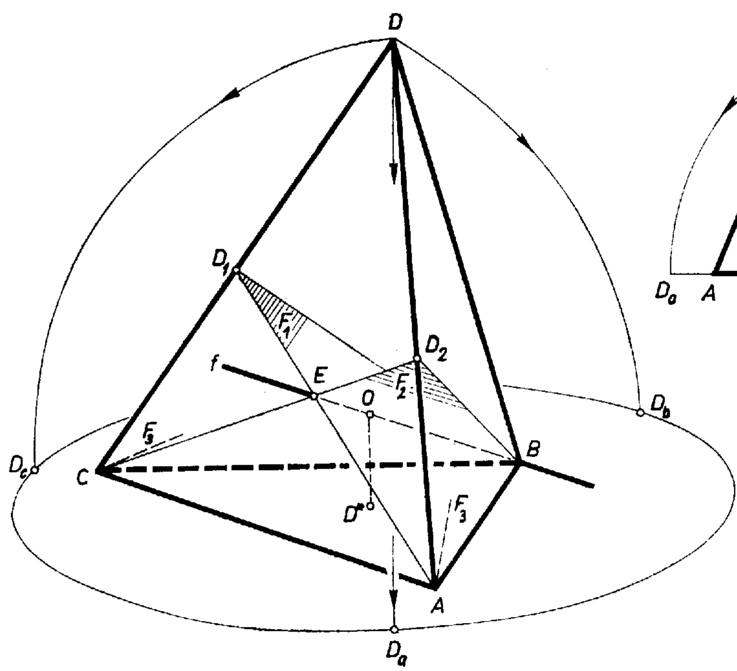

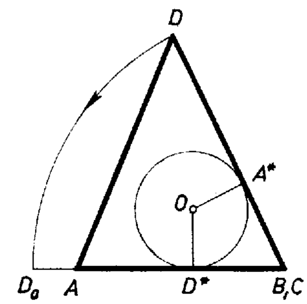

I. Azt kell megmutatnunk, hogy van H belsejében olyan O pont, amely mind a négy laptól egyenlő távolságra van. A H belsejében és az ABC és ABD lapsíkoktól egyenlő távolságra levő pontok az AB élnél levő (belső) lapszög F_1 felezősíkján vannak (és F_1 minden pontja egyenlő távolságra van a két lapsíktól). Hasonlóan a BCA és BCD lapoktól egyenlő távolságra levő H-beli pontok a BC élnél levő (belső) lapszög F_2 felezősíkjának H-beli pontjai. Így H-nak a B-ben összefutó három lapjától egyenlő távolságra levő pontok F_1 és F_2 metszésvonalán, f-en vannak. (A metszésvonal létezik, mert a két síknak van közös pontja, ti. B, másrészt nem esnek egybe, mert van F_1-nek olyan pontja, amely nincs rajta F_2-n, ilyen pl. A.)

Megmutatjuk, hogy f a CAD lapsíkot a CAD háromszög belsejében metszi. F_1 elválasztja C-t D-től, ezért a CD élt egy D_1 belső pontjában metszi, így F_1-nek a CAD lapsíkkal közös egyenese AD_1. Hasonlóan CAD és F_2 közös egyenese CD_2, ahol D_2 az AD élnek belső pontja. Ezek szerint AD_1 és CD_2 egy az ACD háromszög belsejében levő E pontban metszik egymást, és E az f-nek pontja, mert F_1-nek és F_2-nek közös pontja.

Végül a CAB és CAD lapsíkoktól egyenlő távolságban levő H-beli pontok a két lap szögének F_3 felezősíkján vannak. f metszi F_3-at, mert B és E pontjai F_3 két oldalán vannak, így az O metszéspont a BE szakaszon, tehát H belsejében van.

O a D-ben összefutó lapsíkok mindegyikétől ugyanakkora r távolságra van, mint az ABC lapsíktól, ennélfogva az O körül r sugárral írt G gömb H-nak mind a négy lapsíkját érinti, éspedig belülről. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

II. Legyen G érintési pontja a BCD lapon A^*, az ABC lapon D^*; az utóbbit kell megszerkesztenünk. Az érintés miatt A^* és D^* egyenlő távolságra vannak a BC éltől, és a belőlük BC-re állított merőlegesek a BC élen metszik egymást. Ugyanis BC, mint a BCD sík egyenese, merőleges a síkra merőlegesen álló OA^* egyenesre, ugyanígy OD^*-ra is, tehát merőleges az OA^*D^* síkra, ez a sík metszi ki BC-ből az említett pontot. Ezért ha D-vel együtt A^*-ot is az ABC síkba forgatjuk, A^* a D^*-ba jut, így $D_aD^* = DA^*$.

Legyen G érintési pontja a CAD és ABD oldallapon B^*, ill. C^*; ezek D-vel együtt CA, ill. AB körül az ABC síkba forgatva ugyancsak D^*-ba jutnak, tehát $D_bD^* = DB^*$, és $D_cD^* = DC^*$. Ámde DA^*, DB^* és DC^* a G-hez D-ből húzott érintőszakaszok, tehát egyenlők, ezért

$$D_aD^* = D_bD^* = D_cD^*,$$

így D^* valóban a leforgatásokkal kapott D_a, D_b, D_c pontokon áthaladó kör középpontja.

Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A következő meggondolásban kissé másképpen adódik, hogy A^*-nak a fenti forgatás utáni A_a^*-helyzete azonos D^*-gal. $BA^* = BD^*$ és $CA^* = CD^*$, mint G-hez B-ből, ill. C-ből húzott érintőszakaszok. Így $BCA_a^*\triangle \simeq BCA^*\triangle \simeq BCD^*\triangle$, mert a forgatás a méreteket nem változtatja, ill. mert az oldalak páronként egyenlők.