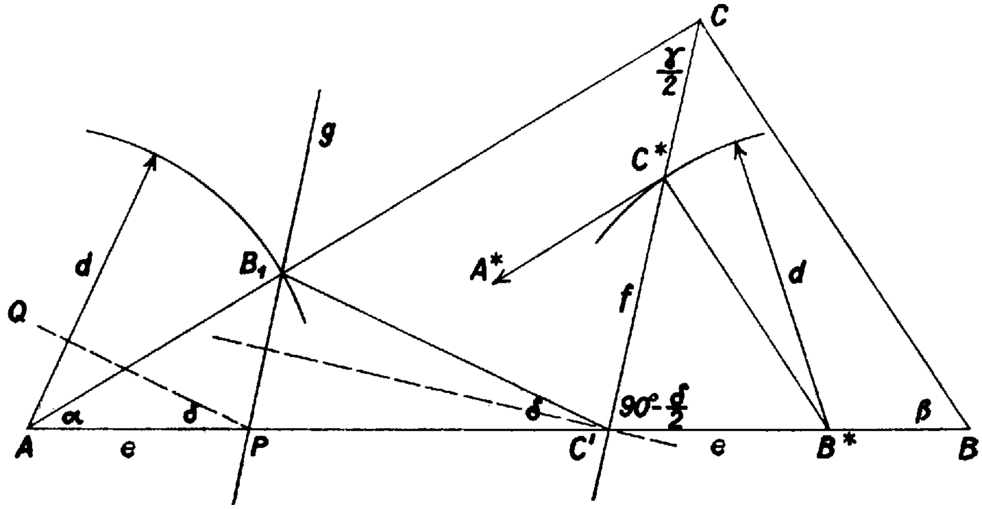
I. megoldás. Ha bármelyik különbség 0, akkor a háromszög egyenlő szárú, így a másik két különbség is 0, és a követelménynek minden egyenlő szárú háromszög megfelel. Tegyük fel tehát, hogy egyik különbség sem 0.

Legyen ABC a keresett háromszög, $AC > BC$. Messe a C-ből húzott szögfelező az AB oldalt C'-ben. Ekkor – a szokásos jelöléseket használva – $\beta > \alpha$, és a szögfelező osztásarányára vonatkozó tétel szerint $AC' > BC'$. Legyen $AC - BC = d$, $\beta - \alpha = \delta$, és $AC' - BC' = e$ az adott értékkel egyenlő. Tükrözzük B-t CC'-re, a B_1 tükörkép az AC szakaszon keletkezik, és $AB_1 = AC - B_1C = AC - BC = d$, másrészt $C'B_1C\sphericalangle = C'BC\sphericalangle = \beta$ az $AC'B_1\Delta$ külső szöge, ezért $AC'B_1\sphericalangle = C'B_1C\sphericalangle - C'AC\sphericalangle = \beta - \alpha = \delta$, végül $C'B_1 = C'B$, és így $AC' - B_1C' = e$. Ezek szerint ismert az $AC'B_1\Delta$ AB_1 oldala, a vele szemben levő szöge és a további két oldal különbsége. A háromszög-egyenlőtlenség szerint az utóbbi kisebb, mint AB_1, azaz $e < d$. Rámérve még AC'-re C'-ből a $C'P = C'B$ távolságot, $AP = e$, és a $B_1C'P$ egyenlő szárú háromszögből $B_1PC'\sphericalangle = (180° - \delta)/2$.



Ezek alapján megszerkeszthető az AB_1C', majd az ABC háromszög pl. a következőképpen: Az e hosszúságú AP szakaszra rámérjük az $APQ\sphericalangle = \delta$ szöget; megszerkesztjük a külső szögének a g szögfelezőjét és ennek azt a felét, amely az AP egyenesnek a Q-t tartalmazó partján van, elmetsszük az A körül d sugárral rajzolt körívvel B_1-ben. PB_1 felező merőlegese metszi ki AP P-n túli meghosszabbításából C'-t, (ugyanis $APB_1\sphericalangle$ tompaszög). Az $AC'B_1\sphericalangle$ külső szögének szögfelezője (ami párhuzamos g-vel) metszi ki AB_1 B_1-en túli meghosszabbításából C-t, végül B_1-nek $C'C$-re vonatkozó tükörképe, ami AC'-nek C'-n túli meghosszabbítására esik, a B csúcs.

Az elemzés lépéseit fordított sorrendben és irányban alkalmazva könnyen láthatjuk, hogy az $ABC\Delta$ megfelel az összes követelményeknek. Ha $d > e$ és $\delta < 180°$, a szerkesztés mindig elvégezhető és egyértelmű.

Belső László (Budapest, XVIII., Hengersor úti g. IV. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Az I. megoldás jelöléseivel az $AC' : BC'$ és $AC : BC$ arányok egyenlőségéből 1-et levonva

$$\frac{AC' - BC'}{BC'} = \frac{AC - BC}{BC}, \quad \text{amiből} \quad \frac{BC}{BC'} = \frac{AC - BC}{AC' - BC'} = \frac{d}{e},$$

továbbá a külső szög tétele alapján

$$BC'C\sphericalangle = C'AC\sphericalangle + C'CA\sphericalangle = \alpha + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta - \alpha}{2} = 90° - \frac{\delta}{2}.$$

Ezek szerint a $BCC'\Delta$-ben ismert két oldal aránya és egy szög, szerkeszthetünk tehát egy hozzá hasonló $B^*C^*C'\Delta$-et pl. úgy, hogy egy $90° - \delta/2$ nagyságú szög – az ábrán $BC'C\sphericalangle$, hiszen $f \parallel g$ – egyik szárára felmérjük a $C'B^* = e$ szakaszt, másik szárát pedig C^*-ban metsszük a B^* körül d sugárral írt körívvel.

Messe a C^*B^* egyenesnek C^*C'-re való tükörképe $C'B^*$-ot A^*-ban, akkor $ABC\Delta \sim A^*B^*C^*\Delta$ is, így az utóbbiból $d : (A^*C^* - B^*C^*)$ arányú nagyítással megkapjuk a keresett háromszöget. A bizonyítás hátra levő részét és a diszkussziót az olvasó könnyen elvégezheti.

Kövér Ákos (Debrecen, Tóth Á. g. III. o. t.)